کارل تی. هراکویچ

درآمدی بر جامدات الاستیک

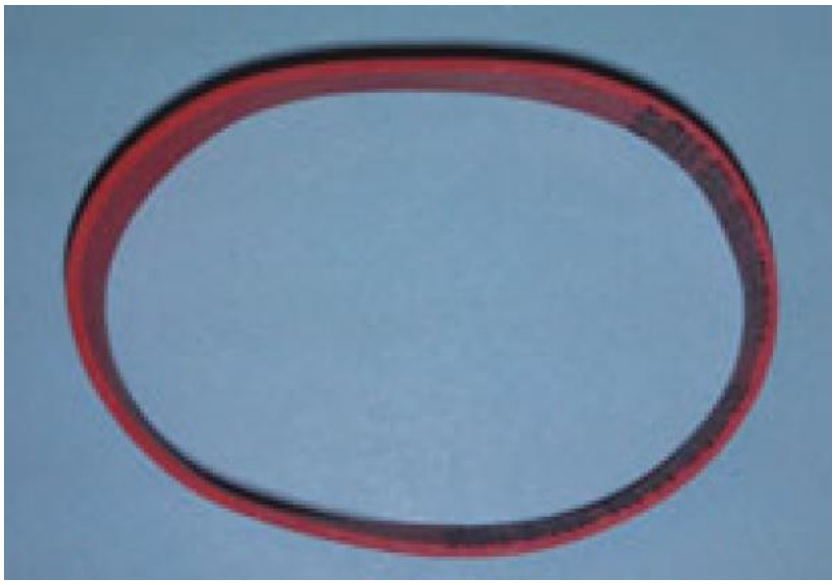
مروری بر مکانیک مواد و سازه های الاستیک

ترجمه: احسان کوثری نیا

عضو هیات علمی دانشگاه صنعتی مالک اشتر

درآمدی بر جامدات الاستیک

رفتار الاستیک



نوار الاستیک پیش از کشیده شدن

نوار الاستیک کشیده شده

کارل تی. هراکویچ

درآمدی بر جامدات الاستیک

مروری بر مکانیک مواد و سازه های الاستیک

ترجمه: احسان کوثری نیا
عضو هیات علمی دانشگاه صنعتی مالک اشتر

پیش گفتار

این نوشتار مروری کلی بر تعاریف کمیتهای بنیادین و روشهای تحلیل به کار رفته در بررسی رفتار الاستیک مواد جامد استفاده شده در اجزای سازه ها انجام داده است. مطالب ارایه شده به محدوده الاستیک خطی رفتار مواد، جایی که رابطه یک به یک میان بار و جابجایی برقرار است. روشهای بنیادین تحلیل و نتایج نمونه برای سازه های ساخته شده از مواد جامد الاستیک که در معرض بارگذاری محوری، خمشی، پیچشی، حرارتی، و فشار درونی قرار گرفته اند، ارایه شده است. پایداری میله ها، تحلیل ورقها، مفاهیم روش المان محدود، و مکانیک مواد کامپوزیت الیافدار نیز مرور شده است.
موضوعات مطرح شده در سطح مقدماتی است و برای دانشجویان رشته های مهندسی و علوم پایه مناسب است. این نوشتار می تواند به عنوان مقدمه ای برای متخصصین در زمینه های مهندسی هوافضا، مهندسی مکانیک، مهندسی مواد و مهندسی عمران محسوب شود. همچنین می تواند به عنوان مروری بر این موضوع برای متخصصین سایر زمینه های مهندسی و علوم به شمار رود. برای دوره های آموزشی دانشگاهی، این کتاب می تواند معادل یک درس یک ساعت در هفته محسوب شود. در نهایت، این کتاب می تواند به عنوان مروری مقدماتی برای آموزش در سطوح تحصیلات تکمیلی به کار رود. این کتاب از دیدگاه یک مهندس با بیش از پنجاه سال تجربه و یک استاد رشته های مهندسی نگاشته شده است. تمرینهای سطح مقدماتی و حل آنها نیز ارایه شده است.

کارل تی. هراکویچ

جولای ۲۰۱۶

سپاسگزاری

نگارنده، سپاس و تقدیر خود را به پروفسور مایکل هایر از دانشگاه صنعتی ویرجینیا و پروفسور جیمز سیموندز از دانشگاه ویرجینیا برای مرور و ارایه پیشنهادهای سودمندشان درباره نگارش نخستین این کتاب، تقدیم می کند. همچنین از همسرم مارلن به پاس بیش از پنجاه سال پشتیبانی و دلگرمی سپاسگزارم. همچنین از مایکل لابی و بریان هالم از انتشارات اسپرینگر برای توصیه های سودمندشان تشکر می کنم.

فهرست

فصل ۱ مکانیک جامدات

۱,۱ مبانی

مکانیک جامدات به شناخت پاسخ مواد جامد (متفاوت از سیالات) هنگامی که تحت بارهای بیرونی و تغییرات شرایط محیطی مانند دما قرار می گیرند، می پردازد. هدف از پژوهش در این زمینه طی قرنهای متمادی، توسعه تعاریف کمیتهای فیزیکی بنیادین مورد نظر و بیان برهم کنش میان این کمیتها با روابط ریاضی بوده است. بنابراین، عبارت مکانیک محیطهای پیوسته نیز برای تعریف این زمینه علمی، به کار رفته است. خواص ممکن است در یک ناحیه مورد نظر ثابت بوده و یا با الگویی پیوسته و از پیش تعریف شده تغییر کند. مواد ناهمگن مانند کامپوزیتهای الیافدار جزو دسته دوم قرار می گیرند.

تاریخچه مفصل مکانیک جامدات تا پیش از ۱۹۵۲ توسط تیموشنکو (۱۹۵۳) ارایه شده است. از انتشار کتاب تاریخچه تیموشنکو تاکنون، پیشرفتهای چشمگیری در این زمینه رخ داده است. به طور خاص، ظهور مواد کامپوزیت الیافدار و توسعه روشهای محاسباتی نوین، طی نیمه دوم قرن بیستم و اوایل قرن بیست و یکم، منجر به پیشرفتهای بزرگی در زمینه مکانیک جامدات و سازه ها شده است. کتابی که اخیرا توسط هراکویچ (۲۰۱۶) نگاشته شده، مروری بر پیشرفتهای مکانیک از ابتدای تاریخ تا زمان حاضر ارایه کرده است (شکل ۱,۱).

در دوره زمانی که در کتاب تیموشنکو بررسی شده است، جامدات مورد نظر اساسا همسانگرد اند که خواص آنها در همه جهات یکسان است. موارد استثنای آن عبارت بود از چوب و برخی از شکلهای بلورین که خواص ناهمسانگرد از خود نشان می دادند (یعنی خواص آنها با جهت تغییر می کند). اخیرا مکانیک جامدات برای موادی به کار می رود که خواص ناهمسانگرد دارند. کاربرد فراگیر مواد کامپوزیتی الیافدار در سازه ها و مطالعات در بیومکانیک، ضرورت مطالعه بر روی جامدات با خواص ناهمسانگرد را موجب شده است.

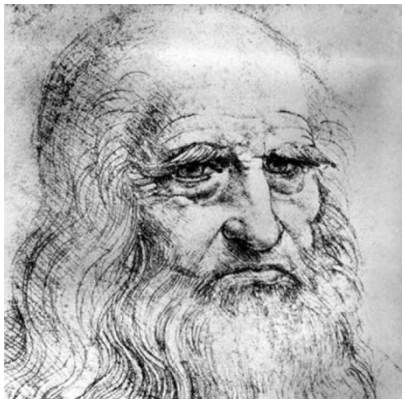
شکل ۱,۱ استفان تیموشنکو

توسعه مهم دیگری که پس از نگارش کتاب تاریخچه تیموشنکو رخ داده است، توسعه در روشهای محاسباتی مانند روش المان محدود (اودن ۲۰۱۱). این روشها اساسا توسط پژوهشگرانی که در زمینه مکانیک جامدات مطالعه می کردند توسعه یافته و هم اکنون به صورت گسترده ای در مباحث گوناگونی از علوم و مهندسی به کار می رود.

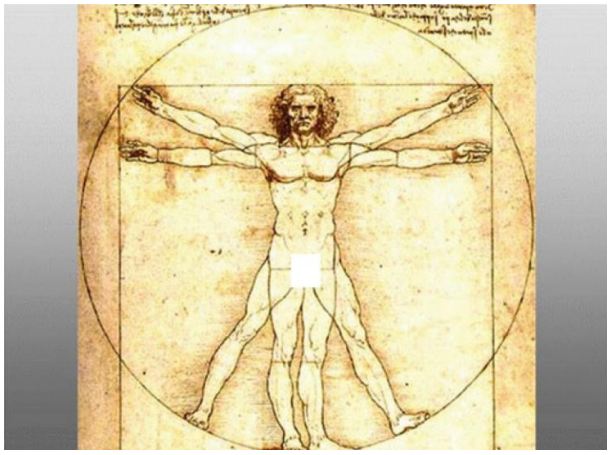
۱,۲ تاریخچه

استفاده از مواد جامد برای کاربردهای سازه ای به دوران باستان برمی گردد. در دورانهای سنگی، برنز، و آهن، نخستین کاربردهای جامدات مصنوعی برای ابزارها و جنگ افزارها بوده است. این تجهیزات، برخلاف نمایش ریاضی جسم فیزیکی مورد نظر، به روش سعی و خطا ساخته می شدند. افرادی که این وسایل را می ساختند، بیشتر هنرمند بودند تا مکانیک. نخستین کاربرد ریاضیات در سازه به زمان ارشمیدس (۲۷۸–۲۱۲ پیش از میلاد) برمی گردد. او مبانی ریاضی برای تعادل شرایط خاص اجسام جامد تحت بار را بیان کرد.

درزمان لئوناردو داوینچی (۱۴۵۲–۱۵۱۹ میلادی) ریاضیات به صورتی کلی تر برای مطالعه مکانیک جامدات، استفاده شد. در حالی که داوینچی به نقاشی مشهور خود، مونا لیزا مشهور است، او از ریاضیات هم برای مطالعه مسایل بنیادین مکانیک جامدات بهره گرفت. تناسبهایی که برای پیکر انسان ارایه کرد (شکل ۱,۳) امروزه در بسیاری از تصاویر به کار می رود. در یکی از یادداشتهایش، داوینچی نوشته است: «مکانیک بهشت علم ریاضیات است زیرا در آن ما به میوه های ریاضیات دست می یابیم». (تیموشنکو (۱۹۵۳)) (شکل ۱,۲).



شکل ۱,۲ لئوناردو داوینچی

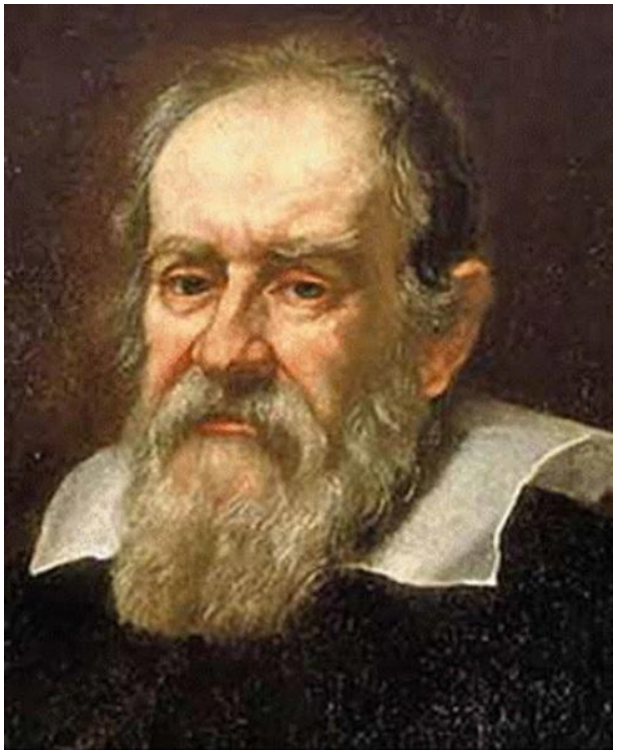


شکل ۱,۳ تناسبهای پیکر انسان

پس از داوینچی، گام مهم بعدی در کاربرد ریاضیات در مکانیک جامدات متعلق به گالئیلو گالیله است. در حالی که گالیله بیشتر به کارهایش در زمینه نجوم مشهور است، در کتابش، دو علم جدید (۱۶۳۸)، او کارهایش را در زمینه مکانیک به طور خلاصه ارایه کرده و بخشی را به خواص مکانیکی مواد سازه ای اختصاص داده است. تیموشنکو، این کتاب را سرآغاز مطالعه در مکانیک جامدات می داند.

رابرت هوک (۱۶۳۵–۱۷۰۳) رابطه خطی میان نیرو و جابجایی که مبتنی بر آزمایشهای خویش بود را پیشنهاد کرد. این رابطه خطی برای پاسخ مواد الاستیک اکنون به عنوان قانون هوک شناخته می شود. این رابطه برای موادی که ارتباط یک به یک میان نیروی اعمالی و تغییر شکل دارند و پس از باربرداری، هیچ تغییر شکل دائمی در آنها به وجود نمی آید، معتبر است. کاربرد نوین این قانون برحسب عبارتهای تنش (نیرو بر واحد سطح) و کرنش (تغییر شکل بر واحد طول) بیان می شود (شکل ۱,۴).

مطالعه پاسخ الاستیک جامدات اکنون به نام تئوری ریاضی الاستیسیته شناخته می شود. این تئوری اساسا در قرن نوزدهم توسط ریاضیدانان فرانسوی در پلی تکنیک لکول در پاریس توسعه داده شد. پیشکسوتان توسعه این تئوری عبارت بودند از: ناویر (۱۷۸۵–۱۸۳۶)، کاشی (۱۷۸۹–۱۸۵۷)، پواسون (۱۷۸۱–۱۸۴۰)، و سنت ونانت (۱۷۹۷–۱۸۸۶). تئوری ریاضی الاستیسیته معادلات لازم برای تعیین تنشها و کرنشها در جسم جامد الاستیک هنگامی که تحت نیروهای خارجی یا تغییرات شرایط محیطی قرار می گیرد را ارایه می کند.



شکل ۱,۴ گالئیلو گالیله

شکل ۱,۵ آگوستین- لویی کاشی

مفاهیم اولیه این تئوری در فصلهای بعد با کاربرد در مسایل خاص آرایشهای یک بعدی، دوبعدی یا سه بعدی توصیف شده است.همه جابجاییها کوچک درنظر گرفته شده و اجسام جامد در وضعیت تعادل استاتیک قرار دارند. مسایل بنیادین برای مواد همسانگرد ارایه شده است. البته، معادلات پایه برای مواد ناهمسانگرد لایه ای و پیچیدگیهایی که ایجاد می کنند نیز ارایه شده و بحث شده است. مطالب طرح شده شامل مقدمه ای بر روشهای نوین مکانیک محاسباتی، یا مشخصا روش المان محدود، برای تحلیل آرایشهای پیچیده مواد و سازه ها است (شکلهای ۱,۵، ۱,۶ و ۱,۷).

شکل ۱,۶ سیمئون دنیس پواسون

شکل ۱,۷ باری د–سنت ونانت

مراجع

Galilei, G. (1638). Discourses and mathematical demonstrations relating to two new sciences. Amsterdam: House of Elzevir.

Herakovich, C. T. (2016). Mechanics IUTAM USNC/TAM. Berlin: Springer.

Oden, J. T. (2011). An introduction to mathematical modelling. London: Wiley.

Timoshenko, S. P. (1953). History of strength of materials. McGraw-Hill Book Company, New York. Also Dover Publications, 1953.

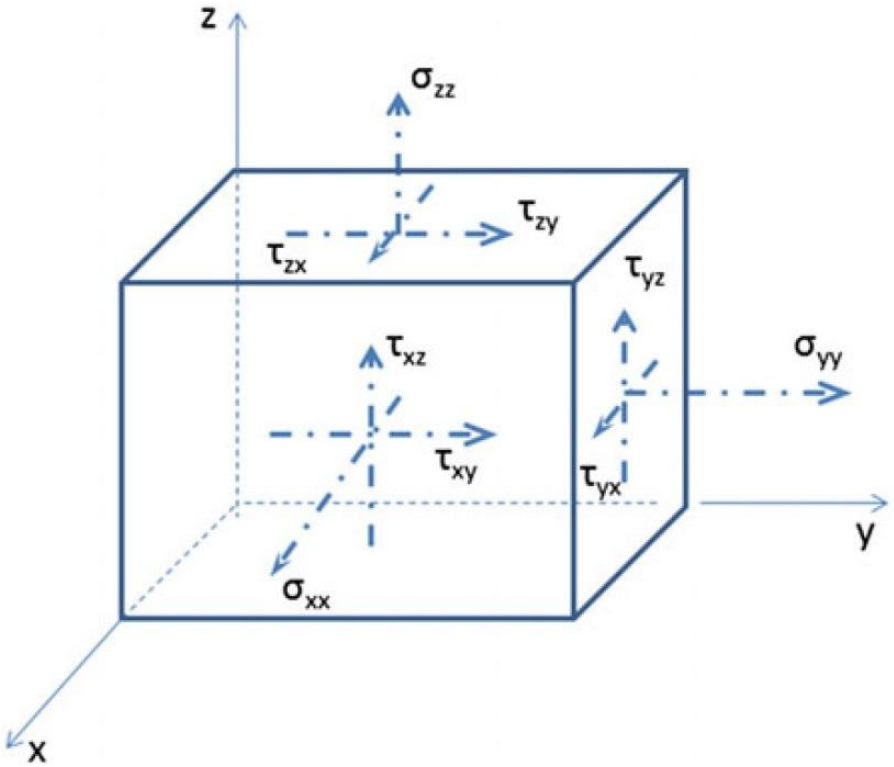
فصل ۲
تنش

۲,۱ تنش کاشی

مفهوم تنش ابتدا توسط کاشی (۱۷۹۸) تعریف شد و توسط سنت ونانت (۱۷۹۷) به شکل نهایی خود ارایه شد. یک المان مکعبی بسیار کوچک (شکل ۲,۱) که در وضعیت تعادل قرار دارد را درنظر بگیرید. نیروهای بر واحد سطح بر هر وجه المان همان تنشهای وارد بر آن وجه می باشند. دو نوع تنش وجود دارد؛ تنشهای نرمال یا عمودی که عمود بر وجه المان می باشند و تنشهای برشی که موازی وجه المان می باشند.

از نمادهای گوناگونی برای مشخص کردن تنش استفاده شده است. در این کتاب، از σ برای تنش نرمال و از σ یا τ برای تنش برشی استفاده شده است. این نماد البته با زیروندهایی که بیانگر صفحه ای که تنش به آن اعمال شده و راستای تنش کامل می شود. بنابراین σ_{xx} تنش نرمالی است که در راستای محور x است و بر صفحه ای اعمال شده که بردار نرمال آن در راستای x می باشد. تنشهای برشی بر وجه x در راستای y و z، به ترتیب با نمادهای τ_{xy} و τ_{xz} مشخص می شوند.

تنشهای نرمال هنگامی که کششی باشند مثبت در نظر گرفته می شوند، و تنشهای برشی هنگامی مثبت می باشند که بردار نیرو در راستای مثبت محور مربوطه باشد. همه تنشهای نشان داده شده در شکل ۲,۱ مثبت می باشد. ملاحظه می شود که تنشهای وارد بر یک وجه مربوط به سه مولفه بردار نیروی (بر واحد سطح) دلخواه وارد بر آن سطح می باشند. البته، تنشهای نرمال و برشی بر وجوه مقابل (در شکل ۲,۱ نشان داده نشده اند) باید در راستای مخالف باشند تا تعادل نیرو و ممان برقرار باشد. در یک نقطه نه مولفه منحصر به فرد تنش وجود دارد.



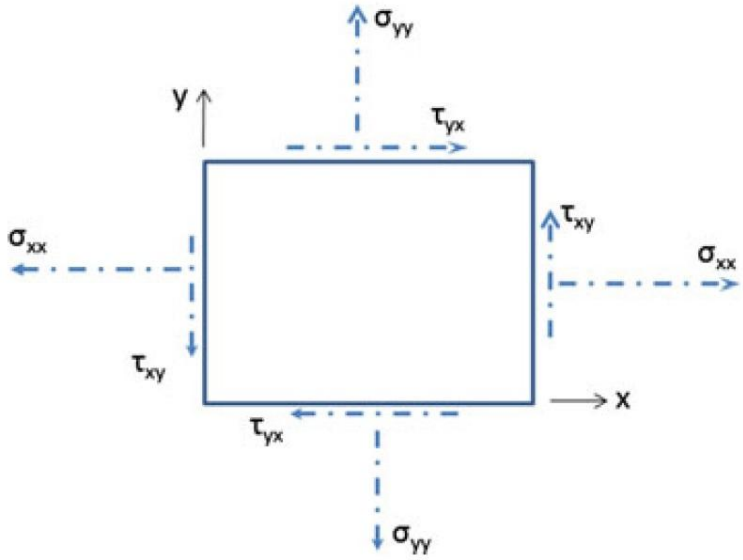
شکل ۲,۱ مولفه های تنش

۲,۲ تنش صفحه ای

نمایش کامل وضعیت دوبعدی تنش (تنش صفحه ای که همه مولفه های z تنش صفر باشند) در یک نقطه در شکل ۲,۲ ترسیم شده است. توجه داشته باشید که تنشهای برشی بر سه دسته از وجوه مقابل باید برابر زوج نیروهایی باشند که در تعادل ممان قرار دارند. برای آنکه این شرط برقرار باشد، تنشهای برشی در یک نقطه از نظر اندازه با هم برابر می باشند، یعنی:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad (۲,۱)$$

برای آنکه شرط تنش صفحه ای در صفحه x-y برقرار باشد، باید مولفه های z تنش صفر باشد، یعنی $\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$.



شکل ۲,۲ تنش صفحه ای در یک نقطه

۲,۳ تبدیل تنش

وضعیت تنش صفحه ای تابعی از صفحه ای است که از آن نقطه می گذرد. ایده آل و مطلوب آن است که بتوان وضعیت تنش را در هر صفحه دلخواه گذرنده از آن نقطه بیان کرد. این کار را می توان با درنظر گرفتن معادلات تعادل برای هر صفحه مقطع دلخواهی که از المان در شکل ۲,۲ می گذرد انجام داد. معادلات به دست آمده را معادلات تبدیل تنش می نامند. نمودار جسم آزاد یک مقطع از المان که در شکل ۲,۳ نشان داده شده است را درنظر بگیرید. با نوشتن تعادل نیرو در راستاهای x′ و y′ معادلات تبدیل تنش صفحه ای زیر به دست می آید.

$$\sigma_{x'x'} = \sigma_{xx}\cos^2\theta + \sigma_{yy}\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \qquad (۲,۲)$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \qquad (۲,۳)$$

برای تنش نرمال $\sigma_{y'y'}$ با نوشتن معادلات تعادل، نتیجه زیر به دست می آید:

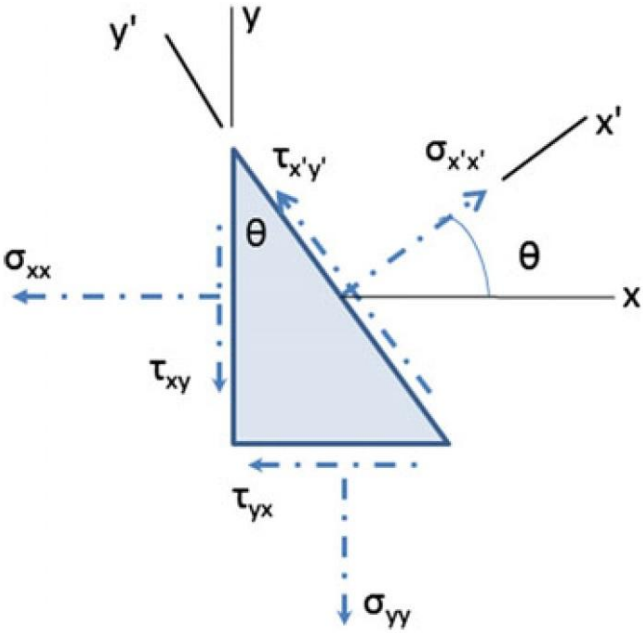
$$\sigma_{y'y'} = \sigma_{xx}\sin^2\theta + \sigma_{yy}\cos^2\theta - 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \qquad (۲,۴)$$

با استفاده از روابط مثلثاتی (پیوست را ملاحظه کنید) می توان معادلات تبدیل تنش را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\sigma_{x'x'} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (۲,۵)$$

$$\sigma_{y'y'} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (۲,۶)$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (۲,۷)$$



شکل ۲,۳ مقطعی دلخواه از المان تنش صفحه ای

با تعریف $m = cos\theta$ و $n = sin\theta$، معادلات تبدیل (۲,۲-۲,۴) را می توان به شکل ماتریسی نیز نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \sigma_{y'y'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (۲,۸)$$

۲,۴ تنشهای اصلی

همانگونه که از معادلات تبدیل تنش بر می آید، تنشهای نرمال در یک نقطه با راستای صفحه گذرنده از آن نقطه تغییر می کند. مقادیر بیشینه و کمینه تنشهای نرمال، تنشهای اصلی نامیده می شوند. با مشتق گیری از معادله تبدیل تنش نرمال (۲,۴) نسبت به زاویه θ و برابر با صفر قرار دادن آن، θ_P مربوط به صفحات اصلی به دست می آید. معادله حاصل عبارت است از:

$$\tan\left(2\theta_P\right) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \qquad (۲,۹)$$

دو زاویه به دست آمده از این معادله به اندازه ۹۰ درجه با هم اختلاف دارند. صفحاتی که توسط این زوایا تعریف می شوند را صفحات اصلی می نامند. یکی از این صفحات مربوط به تنش نرمال بیشینه و دیگری مربوط به تنش نرمال کمینه است.

با ترکیب این نتایج (معادلات ۲,۴ و ۲,۶) رابطه ای برای تنشهای اصلی به دست می آید:

$$\sigma_{11,22}^{P} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (۲,۱۰)$$

با استفاده از علامت (+) در این معادله، تنش نرمال بیشینه، σ_{11}^{max} ، به دست آمده و با علامت (−)، تنش نرمال کمینه، σ_{11}^{max}، به دست می آید.

مقدار تنش برشی بیشینه در یک نقطه نیز می تواند مورد توجه قرار گیرد. با مشتق گیری نسبت به θ از رابطه تنش برشی (۲,۵) و برابر صفر قرار دادن، رابطه زیر به دست می آید:

$$\tan(2\theta_s) = -\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}}\right) \qquad (۲,۱۱)$$

دو جواب برای θ_s مربوط به صفحات تنش برشی بیشینه و کمینه است. تنشهای برشی بیشینه و کمینه، اندازه یکسانی داشته که تنش برشی بیشینه، مثبت است و تنش برشی کمینه، منفی است. اندازه تنش برشی بیشینه، با ترکیب دو رابطه فوق به دست می آید:

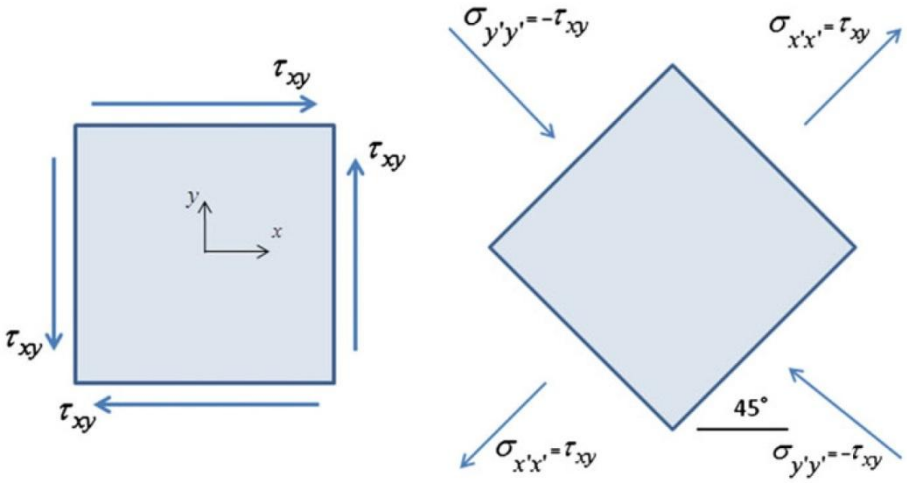
$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (۲,۱۲)$$

می توان نشان داد که تنش برشی بیشینه را برحسب تنشهای اصلی نیز می توان بیان کرد:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \qquad (۲,۱۳)$$

۲,۵ تنش برشی خالص

شرایط تنش برشی خالص، مورد توجه ترین وضعیت تنش است. همانگونه که در شکل ۲,۴ نشان داده شده است، برش خالص در صفحه x-y برابر است با مثبت و منفی تنشهای نرمال خالص با همان اندازه، بر روی صفحات در زوایای ۴۵ درجه نسبت به محورهای x-y. این موضوع توضیح می دهد که چرا ماده تردی مانند یک تکه گچ تحریر، هنگامی که تحت برش خالص قرار می گیرد (فصل ۷)، در صفحه زاویه ۴۵ درجه می شکند. ماده ترد در کشش نسبتا ضعیف بوده و از اینرو در صفحه ای که بالاترین تنشهای کششی نرمال را دارد می شکند.



شکل ۲,۴ تنش برشی خالص

۲,۶ تانسور تنش

نه مولفه تنش را می توان با کمیت تانسور نشان داد زیرا از قوانین تبدیل تانسوری که در پیوست اشاره شده پیروی می کند. نمایش استاندارد برای تانسور تنش به صورت زیر است:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad (۲,۱۴)$$

در رابطه (۲,۱۴)، اندیسهای ۱، ۲، ۳ نمایانگر x، y، z در سیستم مختصات کارتزین است. همچنین، رعایت شرط تعادل مستلزم آن است که تانسور تنش متقارن باشد، یعنی:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad (۲,۱۵)$$

۲,۷ واحدهای تنش

تنش، نیرو بر واحد سطح است. از اینرو، تنش را می توان با پوند بر اینچ مربع (psi) یا پاسکال (Pa که به صورت نیوتون بر متر مربع در سیستم واحدهای بین المللی SI تعریف می شود). واحدهای نیرو از قانون دوم نیوتون به دست می آید که بیان می کند F=m.a. یک نیوتون (N) نیروی مورد نیاز برای شتاب دادن یک کیلوگرم (kg) جرم (m) در شتاب (a) یک متر بر مجذور ثانیه (m/s^2) است. بنابراین، $1\ N = 1\ kg\ .\ 1\ m/s^2$. واحد جرم در سیستمهای واحدهای انگلیسی، اسلاگ نامیده می شود. اسلاگ جرمی است که هنگامی نیروی یک پوند به آن اعمال می شود شتابی برابر با یک ft/s^2 می گیرد. از اینرو، واحد اسلاگ برابر است با $1\ slug = 1\ lb.s^2/ft$.

برای اغلب کاربردها، تنش غالبا به صورت ksi (kips (10^3 lb) بر اینچ مربع) یا MPa (مگاپاسکال، که در آن مگا = 10^6) بیان می شود. از این نمادها برای کاهش صفرها (یا ارقام) مورد نیاز برای بیان مقدار اعداد بزرگ استفاده می شود. توجه داشته باشید که $1.0\ MPa = 145.0\ psi = 0.145\ ksi$.

۲,۸ تمرینها

۲,۸,۱ معادله ۲,۲ را اثبات کنید.

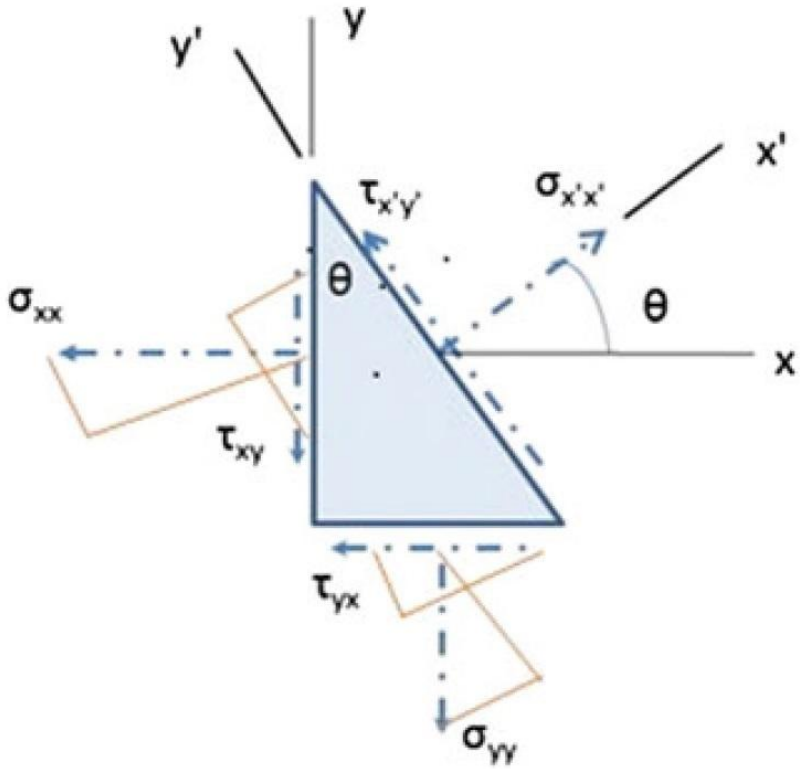
۲,۸,۲ معادله ۲,۵ را اثبات کنید.

۲,۸,۳ معادله ۲,۷ را اثبات کنید.

۲,۸,۴ معادله ۲,۹ را اثبات کنید.

۲,۸,۵ تغییرات تنش نرمال بر صفحات گذرنده از یک نقطه را ترسیم کنید، اگر مشخص باشد که وضعیت تنش، صفحه ای بوده و مقادیر تنشها برابر است با $\sigma_{xx} = 40,\ \sigma_{yy} = -20,\ \tau_{xy} = 10$.

پیوست: پاسخها



۲,۸,۱ معادله ۲,۲ را اثبات کنید.

حل:

رابطه (۲,۲):

$$\sigma_{x'x'} = \sigma_{xx}\cos^2\theta + \sigma_{yy}\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

با جمع نیروها در راستای x'-x' می توان نوشت:

$$\sum F_{x'x'} = 0$$

$$\sigma_{x'x'}A = \sigma_{xx}\cos\theta A\cos\theta + \sigma_{yy}\sin\theta A\sin\theta + \tau_{xy}\cos\theta A\sin\theta + \tau_{xy}A\cos\theta\sin\theta$$

$$\sigma_{x'x'} = \sigma_{xx}\cos^2\theta + \sigma_{yy}\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\cos\theta A\sin\theta$$

۲,۸,۲ معادله ۲,۵ را ثابت کنید.

رابطه (۲,۵):

$$\sigma_{x'x'} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

حل:

با استفاده از روابط مثلثاتی و قرار دادن آنها در رابطه (۲,۲) می توان نوشت:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\sigma_{x'x'} = \sigma_{xx}\frac{1+\cos 2\theta}{2} + \sigma_{yy}\frac{1-\cos 2\theta}{2} + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'x'} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

۲,۸,۳ معادله ۲,۷ را ثابت کنید.

معادله (۲,۷):

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

حل:

با نوشتن مجموع نیروها در راستای y'-y' و استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$\sum F_{y'y'} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\tau_{x'y'}A = A\cos\theta\left(\sigma_{xx}\sin\theta - \tau_{xy}\cos\theta\right) + A\sin\theta\left(\tau_{xy}\sin\theta - \sigma_{yy}\cos\theta\right)$$

$$\tau_{x'y'} = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)$$

$$\tau_{x'y'} = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\frac{\sin 2\theta}{2} + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

۲,۸,۴ رابطه ۲,۹ را اثبات کنید.

رابطه (۲,۹):

$$\tan(2\theta_P) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

حل:

تنش نرمال بر صفحه دلخواه از رابطه (۲,۵):

$$\sigma_{x'x'} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

مشتق گیری نسبت به θ و قرار دادن آن برابر با صفر برای یافتن کمینه و بیشینه:

$$\frac{d\sigma_{x'x'}}{d\theta} = 0 = -2\sigma_{xx}\sin\theta\cos\theta + 2\sigma_{yy}\sin\theta\cos\theta + 2\tau_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

$$0 = \frac{-\sigma_{xx}\sin 2\theta}{2} + \frac{\sigma_{yy}\sin 2\theta}{2} + \tau_{xy}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} - \frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)$$

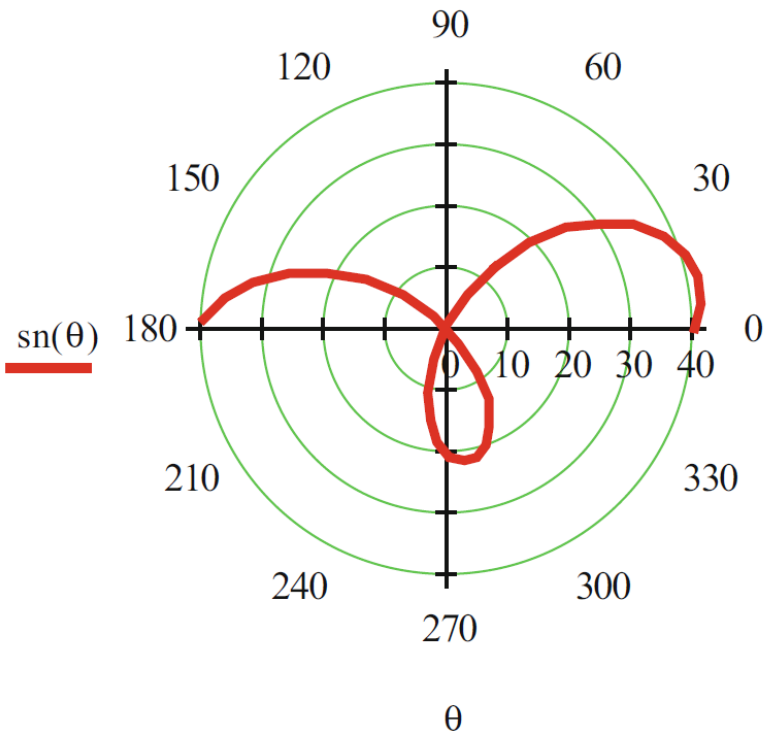
$$0 = \frac{\sin 2\theta}{2}\left(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\right) + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

۲,۸,۵ تغییرات تنش نرمال بر صفحات گذرنده از یک نقطه را ترسیم کنید، اگر مشخص باشد که وضعیت تنش، صفحه ای بوده و مقادیر تنشها برابر است با $\sigma_{xx} = 40,\ \sigma_{yy} = -20,\ \tau_{xy} = 10$.

حل:

ترسیم رابطه (۲,۲):



مراجع

Cauchy (1789–1857) Cauchy, A. (1822). Memoires de l'acdemie des sciences, Paris, Vol. 7, (1827), pp. See, Bulletin de la societe philomathique, Paris (1823), p. 177.

Saint Venant (1797–1886) Saint-Venant, A. J. C. Barré de. (1845). Comptes Rendus, v20, p. 1765 and v21, p. 125.

فصل ۳
کرنش

۳,۱ کرنش نرمال

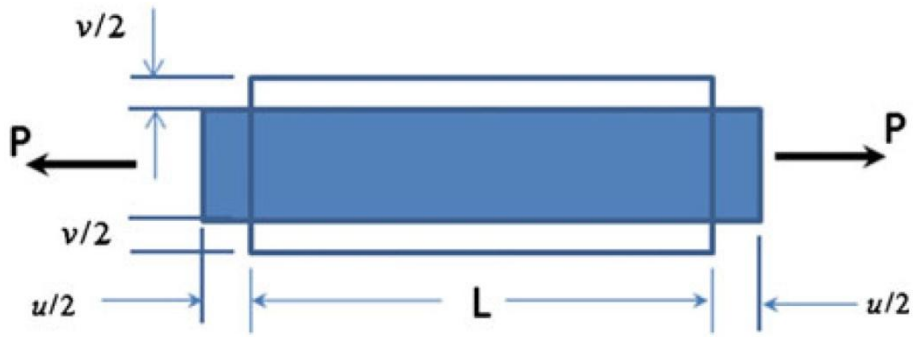
کرنش نرمال یا عمودی، ε، عبارت است از تغییر طول، u، بر واحد طول هنگامی که جسمی به طول L، در معرض تنش نرمال قرار گیرد. برای بارگذاری P در راستای x (شکل ۳,۱)، کرنش محوری (نرمال) به این صورت تعریف می شود:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{u}{L} \qquad (۳,۱)$$

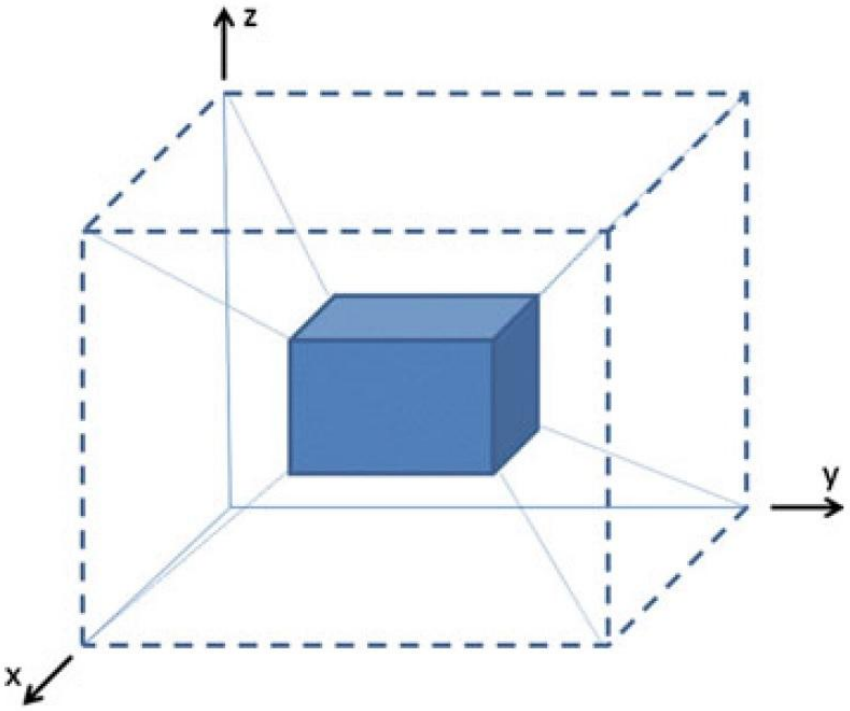
برای یک مکعب سه بعدی، کرنشهای نرمال عبارتند از: ε_{xx}، ε_{yy}، و ε_{zz}. کرنشهای نرمال مثبت در شکل ۳,۲ نشان داده شده اند که در آن شکل اولیه مکعب (خط پر) و شکل تغییر شکل یافته آن (خط چین) نشان داده شده است. از آنجا که کرنش به صورت طول، u، تقسیم بر طول، L، تعریف می شود، لذا یک کمیت بی بعد است. البته گاهی به صورت in/in، m/m، یا درصد کرنش بیان می شود.

۳,۲ کرنش برشی مهندسی

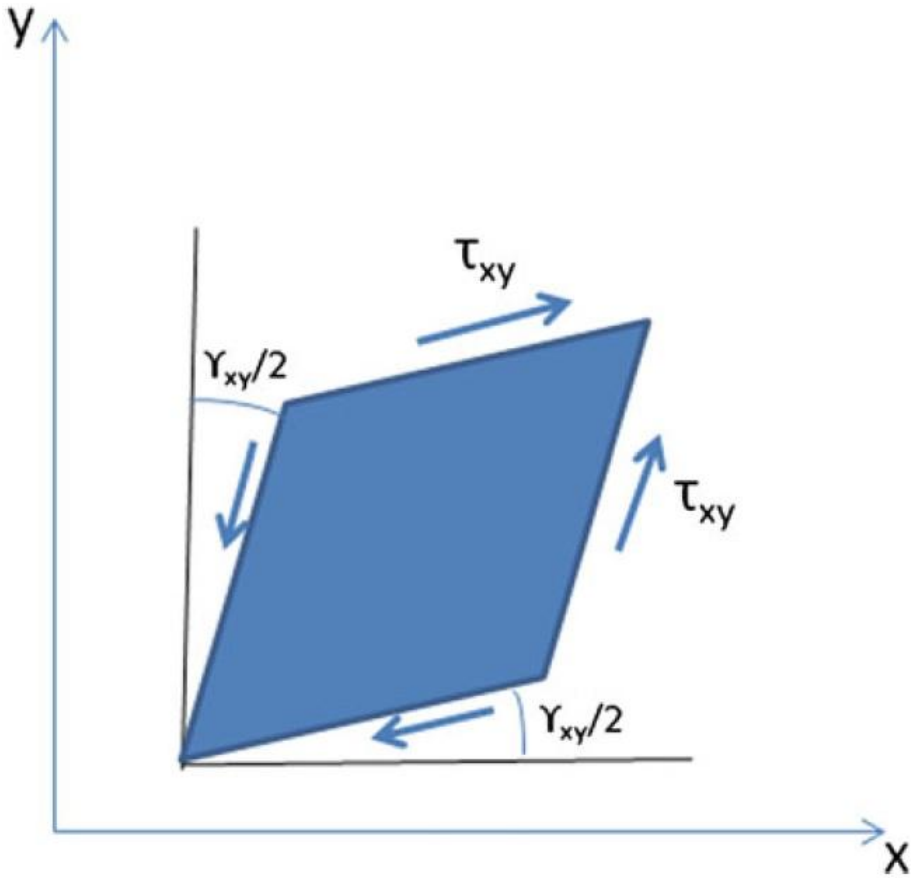
کرنش برشی مهندسی به تغییر تمایل یک المان هنگامی که تحت تنش برشی قرار می گیرد، مربوط می باشد. مشخصا، تغییر زاویه کل (برحسب رادیان) از زاویه متعامد اولیه المان، ناشی از اعمال تنش برشی، کرنش برشی مهندسی نامیده می شود. شکل ۳,۳ کرنش برشی مهندسی γ_{xy} نامیده می شود.



شکل ۳,۱ کرنشهای محوری



شکل ۳,۲ تغییر شکلهای کرنش نرمال سه بعدی



شکل ۳,۳ کرنشهای برشی

۳,۳ روابط کرنش-جابجایی

در بخشهای پیشین، کرنش نرمال و کرنش برشی برای حالتهای خاص تغییر شکل تعریف شده اند. در حالت کلی تر، می توان روابط کرنش-جابجایی در یک نقطه از جسم جامد برحسب عبارتهای جابجایی u، v، و w را به ترتیب در راستاهای x، y، z نوشت. کرنشهای نرمال عبارتند از نسبت تغییر جابجایی در یک راستای خاص. آنها را می توان به صورت مشتقهای جزیی بیان کرد (برای مشتقهای جزیی، پیوست را ببینید). معادلات کرنش-جابجایی زیر هنگامی معتبر است که جابجاییها کوچک باشد و مشتقهای مرتبه اول آنقدر کوچک باشد که مربع آنها و حاصلضرب مشتقات جزیی، قابل چشم پوشی باشند.

برای سه مولفه نرمال کرنش داریم:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (۳,۲)$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

کرنشهای برشی مهندسی مربوط به تغییر زاویه متعامد در یک صفحه بوده و می توانند به شکل مشتقات جزیی به صورت زیر نوشته شوند:

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad (۳,۳)$$
$$\gamma_{yz} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

۳,۴ تانسور کرنش برشی

برای تبدیل کرنش برشی، لازم است کرنش برشی با کمیت تانسوری بیان شود. توجه داشته باشید که کرنش برشی مهندسی γ_{ij} دو برابر تانسور کرنش برشی ε_{ij} $(i \neq j)$ است. بنابراین، تانسور کرنشهای برشی ε_{ij} برابر است با:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \quad (i \neq j) \tag{۳,۴}$$

توجه داشته باشید که کرنش یک تانسور متقارن است، یعنی $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

اکنون می توانیم رابطه ای کلی برای همه شش مولفه تانسور کرنش، ε_{ij} بنویسیم:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] \tag{۳,۵}$$

(i، j : راستاهای x، y و z)

تانسور (۳,۵) به عنوان تانسور کرنش جزیی کاشی شناخته می شود.

۳,۵ تبدیل کرنش

همانند تنشها (فصل ۲، روابط ۲,۴ و ۲,۵) غالبا مطلوب است که کرنشها در یک دستگاه مختصات خاص x′، y′ بیان شود. معادلات تبدیل کرنش برای زاویه دوران θ حول محور z عبارتند از:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x'x'} &= \varepsilon_{xx}\cos^2\theta + \varepsilon_{yy}\sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\,\cos\theta \\
\varepsilon_{y'y'} &= \varepsilon_{xx}\sin^2\theta + \varepsilon_{yy}\cos^2\theta - \gamma_{xy}\sin\theta\,\cos\theta \\
\gamma_{x'y'} &= -2(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})\sin\theta\,\cos\theta + \gamma_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)
\end{aligned} \tag{۳,۶}$$

از آنجا که کرنش یک کمیت تانسوری است، با استفاده از پیوست الف–۱۲ می توانیم معادله تبدیل عمومی برای دوران حول محور z با i، j برابر با ۱ و ۲ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\varepsilon'_{ij} = a_{1i}a_{1j}\varepsilon_{11} + a_{1i}a_{2j}\varepsilon_{12} + a_{2i}a_{1j}\varepsilon_{21} + a_{2i}a_{2j}\varepsilon_{22} \tag{۳,۷}$$

که در آن

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{۳,۸}$$

مشابه معادله تبدیل تنش (۲,۸)، معادله تبدیل کرنش را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \varepsilon_{y'y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{۳,۹}$$

۳,۶ نسبت پواسون

همانگونه که در شکل ۳,۱ نشان داده شده است، مواد مقید نشده هنگامی که در معرض کرنش محوری ε_{xx} قرار می گیرند، عموما جابجایی جانبی، ν، از خود نشان می دهند. اغلب مواد هنگامی که در معرض کرنش نرمال کششی قرار می گیرند، کاهش ضخامت از خود نشان می دهند. برخی از مواد کامپوزیت، و تعداد معدودی از مواد دیگر، هنگامی که تحت کرنش کششی قرار می گیرند، افزایش ضخامت (دست کم در برخی از جهتها) از خود نشان می دهند. قرینه نسبت کرنش جانبی ε_{yy} به کرنش محوری ε_{xx} به صورت نسبت پواسون ν تعریف می شود. بنابراین، برای کرنش نرمال اعمالی ε_{xx} :

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} \tag{۳,۱۰}$$

$$\nu_{xz} = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}} \tag{۳,۱۱}$$

علامت منفی در این تعریف، اطمینان ایجاد می کند که نسبت پواسون برای اغلب مواد مثبت باشد. زیروندهای استفاده شده برای نسبت پواسون به نحو روشنی مشخص می کند که هنگامی که ماده همسانگرد نباشد، کدام نسبت پواسون مورد نظر است. برای یک ماده همسانگرد، نسبت پواسون مستقل از جهت است، یعنی $\nu_{xy} \equiv \nu_{xz} \equiv \nu$. محدوده مقادیر نسبت پواسون برای اغلب مواد به صورت زیر است؛ برای شیشه 0.21-0.27، برای فلزات 0.21-0.36، و برای لاستیک برابر است با 0.5 (مک کلینتوک و آرگون ۱۹۶۶). برای مواد کامپوزیت الیافدار لایه ای، نسبت پواسون محدوده وسیعتری از مقادیر شامل بیش از 1.0 و مقادیر منفی را دربر می گیرد (فصل ۱۶ را ببینید).

۳,۷ کرنش صفحه ای

کرنش صفحه ای در صفحه x-y به شرایطی گفته می شود که همه کرنشهای بیرون از صفحه برابر با صفر می باشد، یعنی:

$$\varepsilon_{zz} \equiv \gamma_{zx} \equiv \gamma_{zy} \equiv 0 \tag{۳,۱۲}$$

۳,۸ تمرینها

۳,۸,۱ اگر $\varepsilon_{xx} = 0.001$ باشد، کرنش مربوطه چند درصد است؟

۳,۸,۲ اگر تغییر زاویه تعامد برابر با ۱ درجه باشد، کرنش برشی مربوطه چقدر است؟

۳,۸,۳ از رابطه (۳,۵) استفاده کنید تا نشان دهید که رابطه (۳,۴) صحیح است.

۳,۸,۴ نشان دهید که تانسور کرنش متقارن است.

۳,۸,۵ عبارتی برای کرنش برشی بیشینه $\gamma_{x'y'}$ برحسب کرنشهای ε_{xx}، ε_{yy} و ε_{xy} به دست آورید.

پیوست: پاسخها

۳,۸,۱ اگر $\varepsilon_{xx} = 0.001$ باشد، کرنش مربوطه چند درصد است؟

پاسخ:

$$\varepsilon_{xx} = 0.001 * 100 = 0.1\,\%$$

۳,۸,۲ اگر تغییر زاویه تعامد برابر با ۱ درجه باشد، کرنش برشی مربوطه چقدر است؟

پاسخ:

$$1^\circ * \frac{\pi}{180} = 0.0175\frac{in}{in} = 1.75\,\%$$

۳,۸,۳ از رابطه (۳,۵) استفاده کنید تا نشان دهید که رابطه (۳,۴) صحیح است.

پاسخ:

مثال، برای i=1، j=2، رابطه (۳,۵) می شود:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{12}$$

۳,۸,۴ نشان دهید که تانسور کرنش متقارن است، یعنی نشان دهید که $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$.

پاسخ:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

۳,۸,۵ عبارتی برای کرنش برشی بیشینه $\gamma_{x'y'}$ برحسب کرنشهای ε_{xx}، ε_{yy} و ε_{xy} به دست آورید.

با استفاده از رابطه (۳,۴):

$$\gamma_{x'y'} = -2(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})\sin\theta\,\cos\theta + \gamma_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

پاسخ:

با مشتق گیری از θ و برابر با صفر قرار دادن رابطه فوق و نیز استفاده از روابط مثلثاتی می توان نوشت:

$$\frac{d\gamma_{x'y'}}{d\theta} = 2\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)\left[-\sin^2\theta + \cos^2\theta\right] + \gamma_{xy}[-4\sin\theta\,\cos\theta] = 0$$

$$\frac{d\gamma_{x'y'}}{d\theta} = \left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)\left[\frac{1+\cos 2\theta}{2} - \frac{1-\cos 2\theta}{2}\right] - 2\gamma_{xy}\sin\theta\,\cos\theta = 0$$

$$\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)[\cos 2\theta] - \gamma_{xy}\sin 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta = \frac{\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}\right)}{\gamma_{xy}}$$

مرجع:

McClintock, F., & Argon, A. S. (1966). Mechanical behavior of materials. Addison-Wesley: Boston.

فصل ۴
معادلات مشخصه

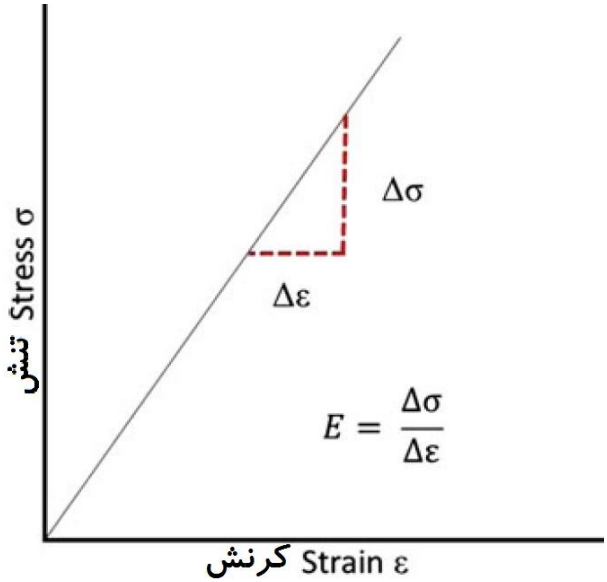
۴,۱ رابطه تنش – کرنش نرمال

معادلات مشخصه روابط میان تنشها و کرنشها را بیان می کند. برای مواد الاستیک خطی، این روابط قانون هوک نامیده می شوند. در فضای سه بعدی، و برای مواد همسانگرد، کرنش نرمال کل در یک راستا عبارت است از مجموع (برهم نهی) کرنشهای ناشی از سه مولفه تنش نرمال. بنابراین، کرنشها برحسب تنشها و دو ثابت مهندسی، مدول، E، و نسبت پواسون، ν، به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}\right) \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{zz}\right) \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - \nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right)
\end{aligned} \tag{۴,۱}$$

در رابطه بالا، E مدول الاستیسیته (که مدول یانگ هم نامیده می شود) و ν نسبت پواسون است که در فصل کرنش توصیف شده است. برای آزمون کشش با تنها تنش غیرصفر اعمالی σ_{xx}، معادله مشخصه (۴,۱) به رابطه مختصر $E = \sigma_{xx}/\varepsilon_{xx}$ تبدیل می شود. بنابراین، مدول الاستیسیته، E، شیب نمودار تنش برحسب کرنش است، از آنجا که کرنش یک کمیت بی بعد است، واحد آن همان واحد تنش است.

بسیاری از مواد، شامل اغلب فلزات، فراتر از محدوده الاستیک، رفتار تنش–کرنش غیرخطی از خود نشان می دهند؛ این رفتار غیرخطی در شکل ۴,۱ نشان داده نشده است. بخش ۶,۵ را برای بحث مختصری درباره رفتار غیرخطی ملاحظه کنید. در محدوده الاستیک خطی، بارگذاری و باربرداری هر دو از یک رفتار الاستیک خطی برخوردار می باشند. از اینرو، باربرداری کل از یک وضعیت تنش در محدوده خطی، وضعیت تنش و کرنش را به صفر برمی گرداند و هیچ گونه تغییر شکل ماندگاری باقی نخواهد ماند. البته زمانی که بارگذاری از محدوده الاستیک فراتر رود، چنین حالتی اتفاق نخواهد افتاد. نتیجه آنکه، حل مساله رفتار الاستیک خطی بسیار ساده تر است.



شکل ۴,۱ نمودار تنش-کرنش الاستیک خطی

غالبا سازه ها به گونه ای طراحی می شوند که در محدوده الاستیک باقی بمانند؛ کاربردهای استثناء آن، مقاومت در برابر تصادف و مقاومت در برابر بارگذاریهای دینامیک مانند انفجارها و زمین لرزه ها است. در این موارد، مطلوب آن است که سازه پس از بارگذاری، با وجود تغییر شکل شدید، شکسته نشود.

۴,۲ رابطه تنش برشی – کرنش

در مواد همسانگرد، کرنشهای برشی (مهندسی) برحسب مدول برشی، G، (یا به طور معادل، برحسب E و ν) و تنشهای برشی و تنشهای برشی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G}\tau_{xx} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \end{aligned} \tag{۴,۲}$$

تانسور کرنشهای برشی برابر است با:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij} = \frac{1}{2G}\tau_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E}\tau_{ij} \tag{۴,۳}$$

۴,۳ رابطه E، G، ν

از روابط پیشین می توان نتیجه گرفت که:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{۴,۴}$$

این رابطه میان E، G، و ν برای مواد همسانگرد را می توان از روش انرژی (بورسی و اشمیت ۲۰۰۳، بخش ۳,۳,۲) یا تحلیل تغییر شکل در برش خالص (گره و تیموشنکو ۱۹۹۷، بخش ۳,۶) به دست آورد. این رابطه اهمیت زیادی دارد زیرا نشان می دهد که تنها دو ثابت مستقل برای مواد الاستیک خطی همسانگرد وجود دارد. این بدان معنی است که خواص (ثوابت) مهندسی برای یک ماده الاستیک خطی همسانگرد را می توان از یک آزمون در آزمایشگاه به دست آورد. در یک آزمایش کشش ساده با تنش (نرمال) محوری اعمالی مشخص، با اندازه گیری کرنش محوری، مدول یانگ، E، به دست می آید، و با اندازه گیری کرنش جانبی، نسبت پواسون، ν، به دست می آید.

مدول، E، و نسبت پواسون، ν، برای سه فلز متداول در جدول ۴,۱ ارایه شده است که در آن مدول برحسب واحد سیستم بین الملل ی، گیگاپاسکال (GPa)، و واحد مگاپوند بر اینچ مربع (Mpsi) (1 Mpsi=6.8948 GPa) داده شده است. مشخصا، همانگونه که از این جدول برمی آید، فولاد بسیار سفت تر از تیتانیوم و آلومینیوم می باشد.

جدول ۴,۱ مقادیر مدولهای فلزات

مواد	مدول E		نسبت پواسون	مدول برشی G	
	GPa	Mpsi		GPa	Mpsi
فولاد	200.0	29.0	0.32	132.0	19.1
تیتانیوم	91.0	13.2	0.36	61.9	9.0
آلومینیوم	69.0	10.0	0.33	45.9	6.7

۴,۴ تمرینها

۴,۴,۱ مقادیر مدول برشی ارایه شده در جدول ۴,۱ را برحسب E و ν داده شده، صحه گذاری کنید.

۴,۴,۲ اگر $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma$ باشد، کرنش نرمال ε_{xx} را به دست آورید.

۴,۴,۳ اگر کرنشها بسیار کوچک باشد، از حاصلضرب آنها می توان چشم پوشی کرد. به این ترتیب، تغییر حجم مکعبی که طبق تمرین ۴,۴,۲ تحت تنش نرمال یکنواخت σ قرار گرفته باشد، چقدر است؟

۴,۴,۴ برای وضعیت تنش صفحه ای در صفحه x-y با مقادیر $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = \sigma$، مقدار کرنش نرمال در راستای z، ε_{zz} چقدر است؟

۴,۴,۵ کرنشهای برشی γ_{xz} و γ_{yz} برای وضعیت تنش صفحه ای تمرین ۴,۴,۴ چقدر است؟

پیوست: پاسخها

۴,۴,۱ مقادیر مدول برشی ارایه شده در جدول ۴,۱ را برحسب E و ν داده شده، صحه گذاری کنید.

پاسخ:

با استفاده از نرم افزار Excel و نوشتن رابطه میان E، G، و ν می توان نوشت:

مواد	E				
	GPa	Mpsi		GPa	Mpsi
فولاد	200.0	29.0	0.32	132.0	19.1
تیتانیوم	91.0	13.2	0.36	61.9	9.0
آلومینیوم	69.0	10.0	0.33	45.9	6.7

۴,۴,۲ اگر $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma$ باشد، کرنش نرمال ε_{xx} را به دست آورید.

پاسخ:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}\right)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma}{E}(1 - 2\nu)$$

توجه: اگر $\nu = 1/2$ باشد، آنگاه $\varepsilon_{xx} = 0$.

۴,۴,۳ اگر کرنشها بسیار کوچک باشد، از حاصلضرب آنها می توان چشم پوشی کرد. به این ترتیب، تغییر حجم مکعبی که طبق تمرین ۴,۴,۲ تحت تنش نرمال یکنواخت σ قرار گرفته باشد، چقدر است؟

پاسخ:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma}{E}(1 - 2\nu) = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} \equiv \varepsilon$$

$$\Delta V = (L + \varepsilon)^3 - L^3$$

$$\Delta V = L^3 + 3L^2\varepsilon + 3L\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - L^3$$

$$\Delta V = 3L^2\varepsilon + 3L\varepsilon^2 + \varepsilon^3$$

با چشم پوشی از توانهای بالای ε، ΔV به $3L^2\varepsilon$ میل می کند.

۴,۴,۴ برای وضعیت تنش صفحه ای در صفحه x-y با مقادیر $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = \sigma$، مقدار کرنش نرمال در راستای z، ε_{zz} چقدر است؟

پاسخ:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - \nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{-2\nu\sigma}{E}$$

۴,۴,۵ کرنشهای برشی γ_{xz} و γ_{yz} برای وضعیت تنش صفحه ای تمرین ۴,۴,۴ چقدر است؟

پاسخ:

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}$$

$$\Rightarrow \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

مراجع

Boresi, A. P., & Schmidt, R. J. (2003). Advanced mechanics of materials (6th ed.). New York: Wiley.

Gere, J. M., & Timoshenko, S. P. (1997). Mechanics of materials (4th ed.). Boston: PWS Publishing.

فصل ۵
تعادل

۵,۱ قانون دوم نیوتون

یکی از مبانی تحلیل رفتار مواد جامد، به کارگیری قانون دوم نیوتون است (نیوتون ۱۶۸۷)، که می گوید مجموع همه نیروی وارد بر جسم ΣF، برابر است با حاصلضرب جرم جسم، m، در شتاب آن، a یا رابطه زیر:

(۵,۱)

برای اجسام ساکن (شتاب a=0)، این معادله را می توان برحسب عبارات سه مولفه نیرو در راستای مختصات x، y، و z نوشت:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \end{aligned} \tag{۵,۲}$$

به طور مشابه، معادلات تعادل (شتاب زاویه ای صفر) برای گشتاورها حول سه محور متعامد عبارت است از:

$$\begin{aligned} \sum M_x &= 0 \\ \sum M_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0 \end{aligned} \tag{۵,۳}$$

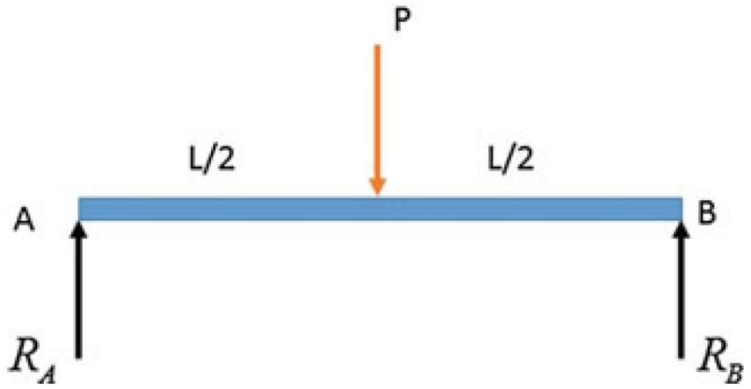
با به کارگیری قانون دوم نیوتون برحسب تنشهای یک نقطه (شکل ۲,۱)، با فرض ناچیز بودن نیروهای جرمی در مقایسه با سایر نیروها، نتیجه به صورت معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی بیان می شود (پیوست را ببینید):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{۵,۴}$$

این معادلات تعادل، بنیادین بوده و به نحو گسترده ای برای تحلیل اجسام ساکن به کار می رود.

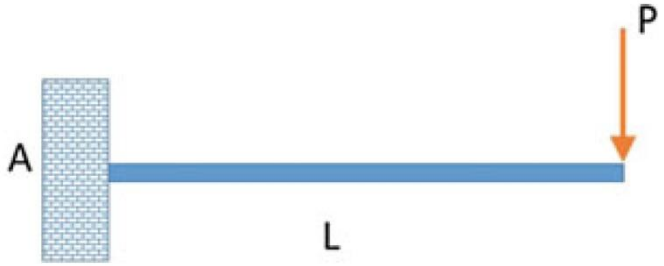
۵,۲ تمرینها

۵,۲,۱ نیروهای عکس العمل در تکیه گاه های A و B برای تیر با تکیه گاه ساده نشان داده شده در زیر را به دست آورید.



۵,۲,۲ ممان در مرکز تیر در مساله ۵,۲,۱ را به دست آورید.

۵,۲,۳ نیروی عکس العمل در تکیه گاه A در تیر یکسر گیردار زیر را به دست آورید.

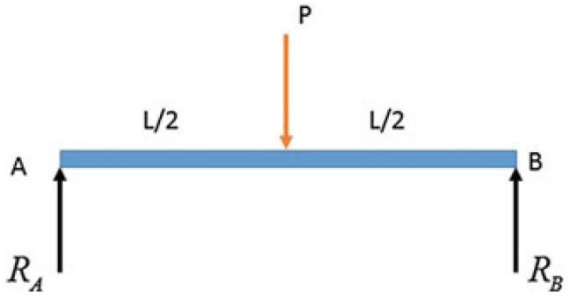


۵,۲,۴ گشتاور عکس العمل در تکیه گاه A را برای تیر یکسر گیردار فوق را به دست آورید.

پیوست: پاسخها

۵,۲,۱ نیروهای عکس العمل در تکیه گاه های A و B برای تیر با تکیه گاه ساده نشان داده شده در زیر را به دست آورید.

پاسخ:



$$\sum M_A = 0 = P\frac{L}{2} - LR_B \quad \Rightarrow R_B = \frac{P}{2}$$
$$\sum F_y = 0 = R_A - P + R_B \quad \Rightarrow R_A = P - R_B$$
$$R_A = \frac{P}{2}$$

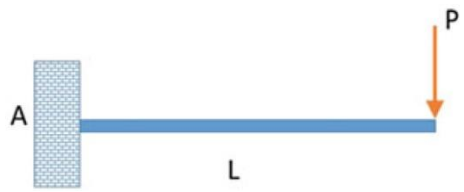
۵,۲,۲ ممان در مرکز تیر در مساله ۵,۲,۱ را به دست آورید.

پاسخ:

$$M_{x=\frac{L}{2}} = \frac{L}{2}R_A = \frac{L}{2}\frac{P}{2} = \frac{PL}{4}$$

۵,۲,۳ نیروی عکس العمل در تکیه گاه A در تیر یکسر گیردار زیر را به دست آورید.

پاسخ:



$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow R_A = P$$

۵,۲,۴ گشتاور عکس العمل در تکیه گاه A را برای تیر یکسر گیردار فوق را به دست آورید.

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow M_A = PL$$

مرجع

Newton, I. (1729). Mathematical principles of natural philosophy, 1687 (A. Motte, Trans). Benjamin Motte.

فصل ۶
بارگذاری محوری

۶,۱ تنش محوری

برای بارگذاری تنش محوری، مانند آزمون کشش (شکل ۶,۱ که همان شکل ۳,۱ است)، برای ماده الاستیک خطی همسانگرد، معادله مشخصه به معادله زیر ساده می شود:

(۶,۱)

که در آن E، مدول الاستیک ماده است.

برای بار محوری P، و سطح مقطع A، تنش نرمال محوری، σ_{xx} برابر است با:

(۶,۲)

۶,۲ کرنش محوری

برای میله ای با طول اولیه L، و تغییر طول u، کرنش محوری، ε_{xx} برابر است با:

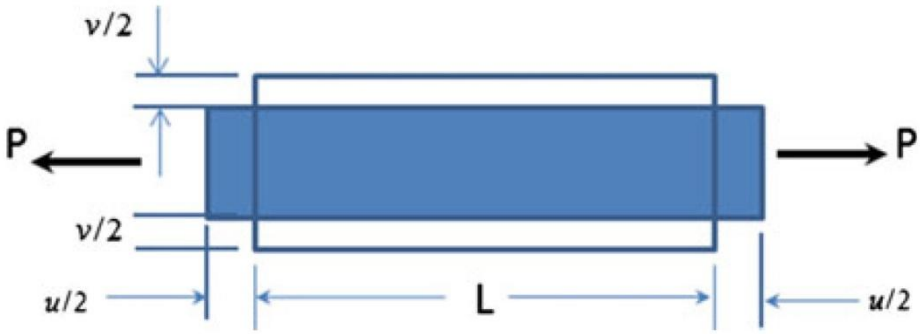
(۶,۳)

۶,۳ تغییر طول

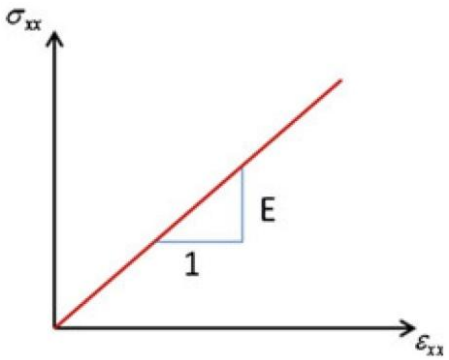
ترکیب معادلات تنش و کرنش (۶,۱-۶,۳) و انتگرال گیری از جابجاییها بر روی طول، L، تغییر طول کل میله، δ تحت بارگذاری محوری را می دهد:

(۶,۴)

این معادله اساسی برای طراحی میله تحت بارگذاری محوری می باشد.



شکل ۶,۱ بارگذاری کششی میله



شکل ۶,۲ رفتار تنش-کرنش خطی

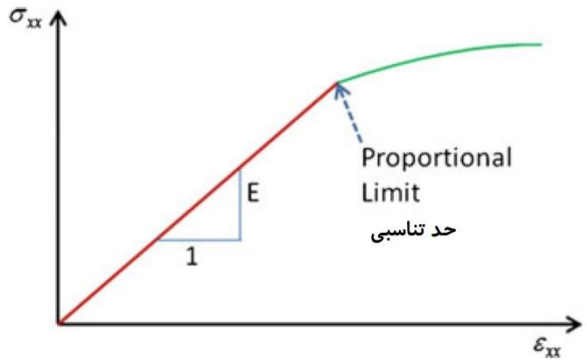
۶,۴ نمودار تنش-کرنش

نمودار تنش-کرنش برای محدوده الاستیک خطی در آزمون کشش، یک خط راست است (شکل ۶,۲). شیب نمودار تنش-کرنش، مدول الاستیک؛ E است که از آن به عنوان سفتی ماده نیز یاد می شود.

۶,۵ رفتار غیرخطی

مواد بسیار معدودی رفتار تنش-کرنش الاستیک خطی تا نقطه شکست از خود بروز می دهند. معمولا همانگونه که در شکل ۶,۳ نشان داده شده است، ابتدا رفتار مذکور خطی بوده و پس از آن رفتار غیرخطی می شود. نقطه تمایز میان ناحیه خطی و غیرخطی به عنوان حد الاستیک یا حد تناسبی شناخته می شود.

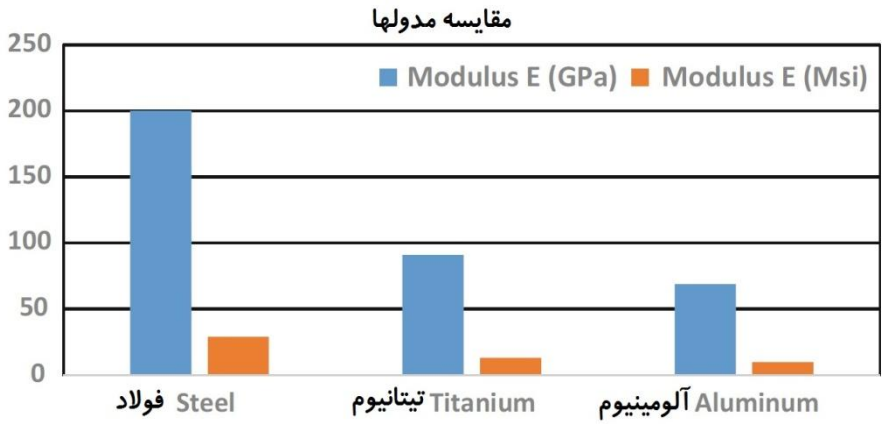
مدول، E، و نسبت پواسون، ν، برای سه فلز متداول در جدول ۴,۱ ارایه شده است (در اینجا نیز در جدول ۶,۱ تکرار شده است) که در آن مقادیر مدول برحسب واحدهای سیستم بین المللی آحاد، گیگاپاسکال (GPa)، و واحدهای مرسوم آمریکایی، مگا پوند بر اینچ مربع (Mpsi) داده شده است (توجه داشته باشید که 1 Mpsi = 6.8948 GPa). همانگونه که در جدول ۶,۱ و شکل ۶,۴ نشان داده شده است، فولاد از تیتانیوم و آلومینیوم بسیار سفت تر است.



شکل ۶,۳ رفتار تنش-کرنش غیرخطی

جدول ۶,۱ مقادیر مدولهای فلزات

مواد	مدول E		نسبت پواسون	مدول برشی G	
	GPa	Mpsi		GPa	Mpsi
فولاد	200.0	29.0	0.32	132.0	19.1
تیتانیوم	91.0	13.2	0.36	61.9	9.0
آلومینیوم	69.0	10.0	0.33	45.9	6.7



شکل ۶,۴ مقایسه مدولها

۶,۶ تمرینها

۶,۶,۱ میله فولادی به قطر 0.5 اینچ در معرض نیروی کشش 500 Lbs قرار گرفته است. تنش میله چقدر است؟

۶,۶,۲ اگر طول میله مساله ۶,۶,۱ برابر با ۵ فوت باشد، تغییر طول ناشی از اعمال نیروی 500 lb چقدر است؟

۶,۶,۳ تغییر قطر میله در مساله ۶,۶,۲ چقدر است؟

۶,۶,۴ تنش این میله برحسب پاسکال چقدر است؟

۶,۶,۵ تغییر طول میله برحسب متر چقدر است؟

پیوست: پاسخها

۶٫۶٫۱ میله فولادی به قطر 0.5 اینچ در معرض نیروی کشش 500 Lbs قرار گرفته است. تنش میله چقدر است؟

پاسخ:

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{A} = \frac{500}{\pi d^2/4} = \frac{2000}{\pi(0.5)^2} = 2{,}546.5\,\text{psi} = 2.546\,\text{ksi}$$

۶٫۶٫۲ اگر طول میله مساله ۶٫۶٫۱ برابر با ۵ فوت باشد، تغییر طول ناشی از اعمال نیروی 500 lb چقدر است؟

پاسخ:

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{500(5*12)}{\pi(0.5)^2(29*10^6)} = 1317.1*10^{-6} = 0.0013171\ \text{in.}$$

۶٫۶٫۳ تغییر قطر میله در مساله ۶٫۶٫۲ چقدر است؟

پاسخ:

$$\Delta d = \varepsilon_{rr} d_1 = \nu \varepsilon_{xx} d_1 = (0.5)(0.32*0.0013171/60) = 3.5123*10^{-6}$$
$$\Delta d = 0.0000035123\,\text{in.}$$

۶٫۶٫۴ تنش این میله برحسب پاسکال چقدر است؟

پاسخ:

$$2,546.5\,\text{psi} * \frac{1\,\text{MPa}}{145\,\text{psi}} = 17.562\,\text{MPa} = 17.562*10^6\,\text{Pa}$$

۶٫۶٫۵ تغییر طول میله برحسب متر چقدر است؟

$$\delta\,\text{in.} * \frac{1.0\,\text{m}}{39.7\,\text{in.}} = \frac{0.0013171}{39.7} = 33.176*10^{-6}\,\text{m} = 33.176*10^{-4}\,\text{cm}$$
$$= 0.033176\,\text{mm}$$

فصل ۷
پیچش میله های استوانه ای

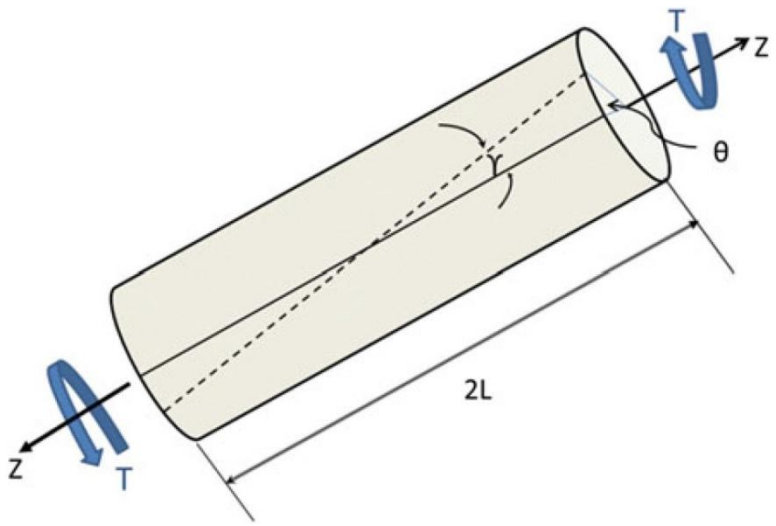
شواهد تجربی نشان می دهد که هنگامی که یک میله توپر یا توخالی در معرض گشتاور پیچشی متعادل قرار گیرد (گشتاور، T، به دو انتهای میله اعمال می شود) (شکل ۷,۱)، صفحات سطح مقطع میله حول محور میله به اندازه زاویه پیچش، θ، دوران می کنند. صفحات سطح مقطع به صورت صفحه باقی می مانند – دچار تابیدگی نمی شوند – و شعاع میله تغییر نمی کند. زاویه پیچش، θ، متناسب با طول، L، و گشتاور، T است.

۷,۱ کرنش برشی

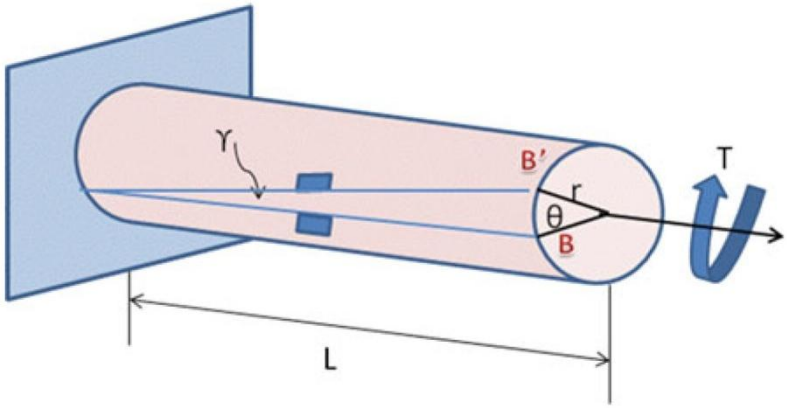
گشتاور نتیجه عمل برشی است که به دو انتهای میله اعمال می شود. کرنشهای برشی مربوط به این گشتاور پیچشی را می توان با درنظر گرفتن جابجاییهای نشان داده شده در شکل ۷,۲ تعیین کرد که در آن، میله ای با انتهای ثابت (یا از نیمه ثابت که در شکل ۷,۱ نشان داده شده) می باشد. برای تغییر شکلهای کوچک، طول کمان $B\text{-}B'$ در این شکل را می توان از دو مثلث تقریب زد، یکی مثلث تشکیل شده از زاویه γ در راستای طول میله و دیگری مثلث تشکیل شده از زاویه θ در سطح مقطع میله. بنابراین،

(۷,۱)

زاویه γ تغییر در زاویه قائم اولیه است و همان کرنش برشی می باشد. از این رابطه، مشخص می شود که کرنش برشی در موقعیت معین، z=L، در سطح مقطع میله به صورت خطی با شعاع، r، تغییر می کند.



شکل ۷,۱ میله دایروی در پیچش



شکل ۷,۲ جابجاییهای پیچشی

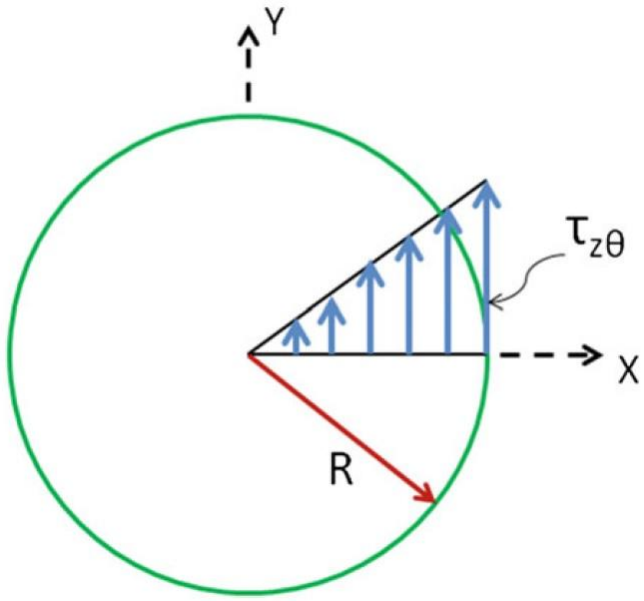
۷,۲ گشتاور

هنگامی که میله ای در معرض گشتاور قرار می گیرد، تنشهای برشی در ناحیه سطح مقطع عرضی، A، ایجاد می شود. توزیع تنشهای برشی (و کرنشهای برشی) بر روی صفحه سطح مقطع، همانگونه که در شکل ۷,۳ نشان داده شده است، به صورت خطی با موقعیت شعاعی، r، تغییر می کند. گشتاور، T، حول محور z، ممان نیروهای مربوط به تنشهای برشی $\tau_{z\theta}$ است که بر روی مساحت سطح مقطع، انتگرال گیری شده است:

$$T = \int_A r\tau_{z\theta} dA \qquad (۷,۲)$$

۷,۳ زاویه پیچش

از معادله مشخصه برای بارگذاری برشی خالص و دو معادله فوق، گشتاور T به صورت زیر به دست می آید:



شکل ۷,۳ توزیع تنش برشی در میله دایره ای

$$T = \frac{G\theta}{L}\int_A r^2 dA = \frac{G\theta J}{L} \tag{۷,۳}$$

که در آن J ممان اینرسی قطبی مساحت سطح مقطع A است. از اینرو، برای گشتاور اعمالی T، زاویه پیچش برابر است با:

$$\theta = \frac{TL}{JG} \tag{۷,۴}$$

این معادله برای طراحی میله های دایره ای در معرض پیچش به کار می رود.

۷,۴ بیشینه تنش برشی

بیشینه تنش برشی در یک استوانه دایره ای تحت پیچش، یکی از ملاحظات مهم طراحی می باشد. برای استوانه ای با شعاع R، بیشینه تنش برشی با ترکیب معادله مشخصه، معادله کرنش، و معادله زاویه پیچش به صورت زیر به دست می آید:

$$\tau_{z\theta}^{\max} = G\gamma^{\max} = \frac{GR\theta}{L} = \frac{TR}{J} \tag{۷,۵}$$

از روند استخراج معادلات پیشین می توان دریافت که این تحلیلها برای هر دو میله های دایره ای توپر و توخالی در معرض بارگذاری پیچشی صادق است.

۷,۵ میله های منشوری غیردایروی

روشهایی برای تحلیل پیچش میله های غیردایروی وجود دارد. متداول ترین این روشها، روشهای عددی و محاسباتی مانند المان محدود است که در فصل ۱۵ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۷٫۶ تمرینها

۷٫۶٫۱ ممان اینرسی قطبی میله دایره ای به شعاع R را به دست آورید.

۷٫۶٫۲ چه گشتاوری برای پیچش میله ای آلومینیومی به میزان ۱۰ درجه باید اعمال شود اگر قطر میله ۲ سانتیمتر و طول آن ۱٫۵ متر باشد؟

۷٫۶٫۳ برای مساله پیشین، بیشینه تنش برشی ایجاد شده در میله برحسب Pa چقدر است؟

۷٫۶٫۴ در مساله ۷٫۶٫۲ کرنش برشی وسط میله در شعاع r=0.5 cm چقدر است؟

۷٫۶٫۵ با پارامترهای داده شده در مساله ۷٫۶٫۲، تنشهای بیشینه را در میله های فولادی، تیتانیومی و آلومینیومی مقایسه کنید.

پیوست: پاسخها

۷٫۶٫۱ ممان اینرسی قطبی میله دایره ای به شعاع R را به دست آورید.

پاسخ:

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\theta = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

۷٫۶٫۲ چه گشتاوری برای پیچش میله ای آلومینیومی به میزان ۱۰ درجه باید اعمال شود اگر قطر میله ۲ سانتیمتر و طول آن ۱٫۵ متر باشد؟

پاسخ:

$$\theta = \frac{TL}{JG} \quad \Rightarrow$$

$$T = \frac{\theta JG}{L} = \frac{10 * (\pi/180)(\pi R^4/2)\left(45.9 * 10^6\,\mathrm{N/m^2}\right)}{1.5\,m}$$

$$T = \frac{10 * (\pi)\left(\pi(1\,\mathrm{cm} * 1\,\mathrm{m}/100\,\mathrm{cm})^4\right)\left(45.9 * 10^6\,\mathrm{N}\right)}{180 * 2 * 1.5\,\mathrm{m}^3}$$

$$T = \frac{10 * (\pi)(\pi(1 * 1\,\mathrm{m}^4))\left(45.9 * 10^6\,\mathrm{N}\right)}{180 * 2 * 1.5\,m^3 * 100^4} = \frac{10 * \pi^2 * 45.9 * 10^6}{180 * 2 * 1.5 * 10^6}\,\mathrm{N-m}$$

$$T = \frac{\pi^2 * 459.0}{180 * 3} = 2.097\,\mathrm{N-m}$$

۷٫۶٫۳ برای مساله پیشین، بیشینه تنش برشی ایجاد شده در میله برحسب Pa چقدر است؟

پاسخ:

$$\tau^{\max} = \frac{TR}{J} = \frac{2.097 * R}{\pi R^4/2} = \frac{4.195}{\pi R^3} = \frac{4.195}{\pi(1 * 10^{-2})^3} = 1.3352 * 10^6 \text{ Pa} = 1.3352 \text{ MPa}$$

۷٫۶٫۴ در مساله ۷٫۶٫۲ کرنش برشی وسط میله در شعاع r=0.5 cm چقدر است؟

پاسخ:

$$\gamma = \frac{r\theta}{L} \quad \text{and} \quad \theta = \frac{TL}{JG} \Rightarrow \gamma = \frac{r}{L}\theta = \frac{r}{L} 10 * \frac{\pi}{180} = \frac{0.5}{18 * 100 * 0.75} = 0.0004$$

۷٫۶٫۵ با پارامترهای داده شده در مساله ۷٫۶٫۲، تنشهای بیشینه را در میله های فولادی، تیتانیومی و آلومینیومی مقایسه کنید.

پاسخ:

$$\tau^{\max} = \frac{TR}{J} \quad \text{and} \quad T = \frac{\theta JG}{L} \Rightarrow \tau^{\max} = \frac{\theta JG}{L}\frac{R}{J} = \frac{\theta R}{L} G$$

مشاهده می شود که نسبت $\theta R/L$ برای هر سه میله یکسان است، از اینرو،

$$\tau_{Al}^{\max} = \frac{\theta R}{L} G_{Al} \quad \tau_{St}^{\max} = \frac{\theta R}{L} G_{St} \quad \tau_{Ti}^{\max} = \frac{\theta R}{L} G_{Ti}$$

فصل ۸
خمش تیر

تیر یک عضو سازه ای است که نیرو و/یا گشتاور به صورت جانب بر طول (غیر همراستای طول) به آن وارد می شود. طول تیر معمولا بزرگتر از پهنا یا ضخامت آن است. مثالی از تیر تحت بارگذاری نیروی متمرکز، تخته شیرجه نشان داده شده در شکل ۸,۱ است. تخته شیرجه یک تیر یکسر گیردار است که در معرض نیروی متمرکز (وزن شناگر) در انتهای خود قرار می گیرد. در اثر این بارگذاری، تخته خم می شود.

۸,۱ خمش خالص

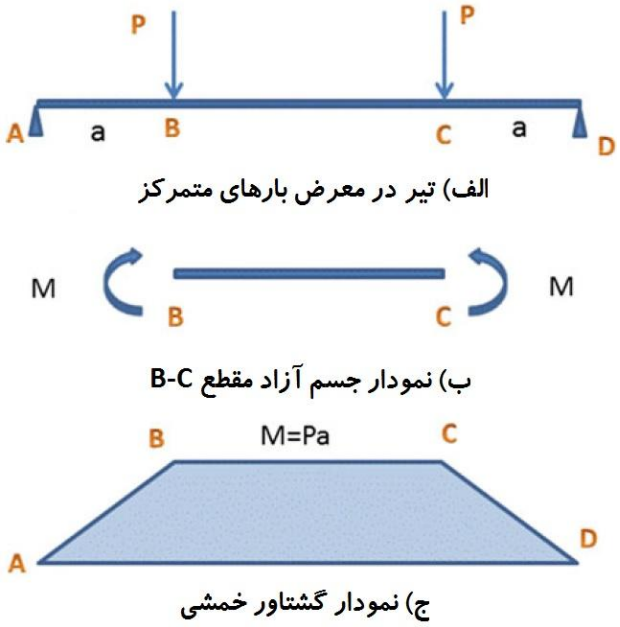
شرایط خمش خالص تیر به تیر یا بخشی از تیر گفته می شود که بارگذاری وارد بر آن تنها ناشی از ممانهای خارجی باشد. در این بخش از تیر نیروهای عمودی یا برشی وجود ندارد. شکل ۸,۲ مثالی از خمش خالص در بخش B-C از یک تیر با تکیه گاه ساده که در معرض بارگذاری نیروی متمرکز قرار گرفته است را نشان می دهد. با استفاده از معادله تعادل گشتاور $\sum M = 0$، می دانیم که نمودار ممان خمشی برای این بارگذاری در شکل ۸,۲ (ج) نشان داده شده است. (از وزن تیر چشم پوشی می شود زیرا در مقایسه با دیگر نیروها، اندک است.)

۸,۲ ممانهای خمشی

توزیع تنشها بر روی سطح مقطع تیر در ناحیه B-C باید معادل گشتاور حول محور عمود بر تیر (محور z در شکل ۸,۳) باشد. یک تیر منشوری با سطح مقطعی که دارای صفحه تقارن است (صفحه x-y) و با محورهای مختصاتی که در شکل ۸,۳ تعریف شده است را درنظر می گیریم. همچنین محور x از مرکز سطح سطح مقطع می گذرد. اندازه گشتاور تنشهای نرمال، σ_{xx} حول محور z باید برابر با گشتاور خارجی M باشد. مرسوم است که این گشتاور به گونه ای تعریف شود که تنش نرمال کششی در بخش پایینی سطح مقطع منجر به ایجاد گشتاور مثبت شود. از اینرو،

$$M = -\int_A y\sigma_{xx} dA \qquad (۸,۱)$$

شکل ۸,۱ تخته شیرجه

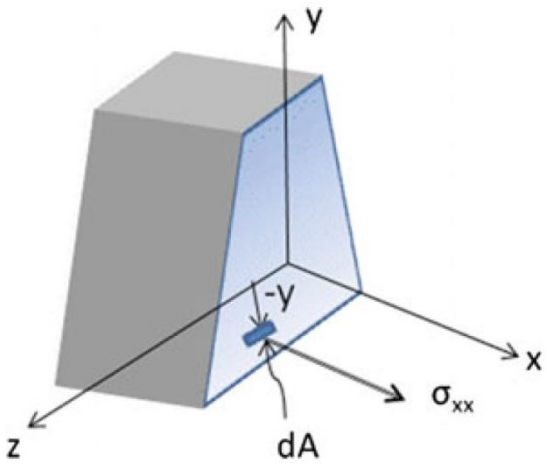


الف) تیر در معرض بارهای متمرکز

ب) نمودار جسم آزاد مقطع B-C

ج) نمودار گشتاور خمشی

شکل ۸,۲ خمش خالص در یک تیر که در معرض بارهای متمرکز قرار گرفته است.



شکل ۸,۳ سطح مقطع تیر متقارن منشوری به همراه تنش نرمال

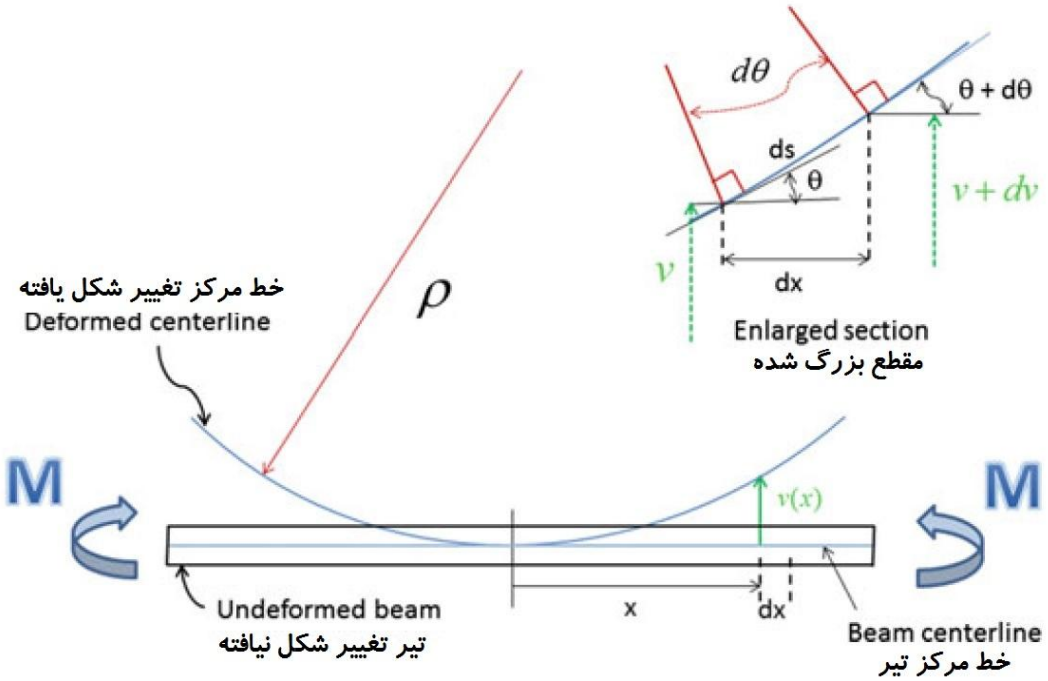
طبق قانون هوک، توزیع تنش بر روی سطح مقطع تیر با توزیع کرنش مرتبط است. کرنشها با درنظر گرفتن انحنایی که ناشی از اعمال گشتاور خمشی در تیر به وجود می آید، ایجاد می شوند. در بخش بعد، ارتباط میان کرنشها و انحنای تیر مورد بررسی قرار می گیرد.

۸,۳ انحنای تیر و کرنشها

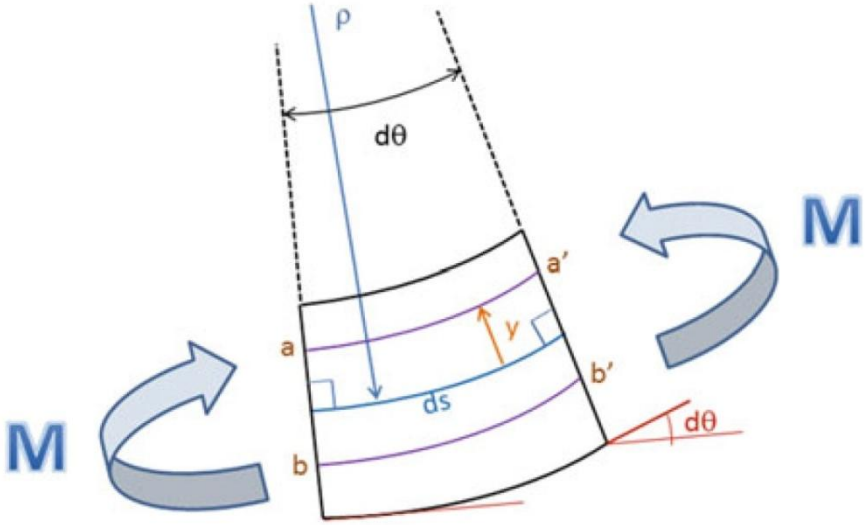
شکل ۸,۴ خط گذرنده از مرکز سطح در صفحه تقارن تیر را در خمش خالص نشان می دهد. خطوطی که در ابتدا در راستای تیر، مستقیم بوده اند هنگامی گشتاورهای خمشی به دو انتهای تیر اعمال می شود، به کمانهای دایره ای تغییر شکل می دهند. با مشخص کردن شعاع انحنای خط با کرنش صفر (تار خنثی) با ρ، می توان نشان داد که کرنش محوری ε_{xx} در موقعیت y بالای تار خنثی، برابر است با: (گره و تیموشنکو)

(۸,۲)

همانگونه که در شکل ۸,۵ نشان داده شده است، صفحاتی که پیش از تغییر شکل عمود بر تار خنثی بوده اند، پس از تغییر شکل نیز همچنان مسطح و عمود بر تار خنثی می باشند. از این شکل می توان دریافت که برای گشتاور خمشی مثبت نشان داده شده، خطوطی مانند a-a′ بالای تار خنثی، فشرده می شوند (کرنش منفی) و خطوطی مانند b-b′ زیر تار خنثی، کشیده می شوند (کرنش مثبت). از اینرو، برای انحنای مثبت نشان داده شده در شکلهای ۸,۴ و ۸,۵، کرنشهای بالای تار خنثی (y مثبت) منفی (فشاری) است و کرنشهای زیر تار خنثی (y منفی) مثبت (کششی) است.



شکل ۸,۴ خیز تیر



شکل ۸,۵ مقطع تیر در خمش خالص

۸,۴ تنشهای ناشی از خمش تیر

تنشهای σ_{xx} مربوط به به کرنشهای محوری (با صفر بودن دیگر مولفه های تنش) از قانون هوک به صورت زیر به دست می آید:

(۸,۳)

ترکیب دو معادله فوق، تنشها را به صورت تابعی از موقعیت y، مدول الاستیک ماده E، و شعاع انحنای تیر ρ به صورت زیر بیان می کند:

(۸,۴)

در اینجا می توان اشاره کرد که با استفاده از تئوری الاستیسیته به همراه مشاهدات تجربی تغییر شکل عضوهای نازک که در معرض تغییر شکلهای کوچک قرار گرفته اند، می توان نشان داد که در خمش خالص، پنج مولفه دیگر تنش برابر با صفر می باشد.

از معادلات پیشین مشاهده می شود که تنش و کرنش محوری بر روی تار خنثی (y=0) صفر می باشند و به صورت خطی با فاصله از تار خنثی تغییر می کنند. برای حل کامل مساله، باید موقعیت تار خنثی را تعیین کرد. این موقعیت را می توان به این شکل مشخص نمود: برای خمش خالص، نیروی محوری برابر با صفر است. طبق تعریف نیروی محوری می توان نوشت:

$$\int_A \sigma_{xx} dA = \int_A \left(-\frac{E}{\rho}\right) y dA = -\frac{E}{\rho}\int_A y dA = -\frac{E}{\rho}\bar{y}A = 0 \qquad (۸,۵)$$

از رابطه بالا می توان مشاهده کرد که فاصله از مرکز سطح $\bar{y} = 0$ است و تار خنثی از مرکز سطح سطح مقطع می گذرد.

برای بیان صریح تنشها برحسب گشتاور اعمالی M، تعریف گشتاور را در نظر می گیریم:

$$M = -\int_A y\sigma_{xx} dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I \qquad (۸,۶)$$

علامت منفی در رابطه بالا برای آن است که طبق تعریف ما، برای گشتاور خمشی مثبت، تنش کششی زیر تار خنثی ایجاد شود. در رابطه فوق، I گشتاور اینرسی سطح مقطع نسبت به محور z است.

از معادله (۸,۶)، می توان رابطه ای برای انحنا $\rho(x)$ به عنوان تابعی از گشتاور خمشی، $M(x)$ نوشت.

(۸,۷)

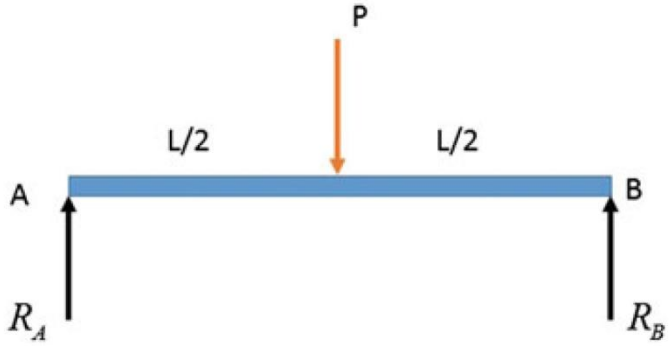
ترکیب معادلات تنش و گشتاور، تنشها را برحسب گشتاور اعمالی M، ممان اینرسی I، و فاصله y از تارخنثی، می دهد:

(۸,۸)

این معادله، یک رابطه اساسی برای تنشهای محوری در تیر در معرض خمش است. روشن است که تنش بیشینه در تیر در خمش خالص در دورترین نقطه از تار خنثی ($y = y^{max}$) رخ می دهد. برای گشتاور خمشی مثبت، تنش بیشینه فشاری است، اگر بالای تار خنثی باشد و کششی است، اگر زیر تار خنثی باشد.

۸,۵ تمرینها

۸,۵,۱ تغییرات گشتاور خمشی برای تیر تکیه گاه ساده بارگذاری شده مطابق با شکل زیر را ترسیم کنید.



۸,۵,۲ تغییرات گشتاور خمشی برای تیر یکسرگیردار بارگذاری شده مطابق با شکل زیر را ترسیم کنید.

۸,۵,۳ شعاع انحنای یک میله مربعی آلومینیومی به ضلع مقطع 2 اینچ که تحت گشتاور خمشی M=150 ft-lbs قرار گرفته است چقدر است؟

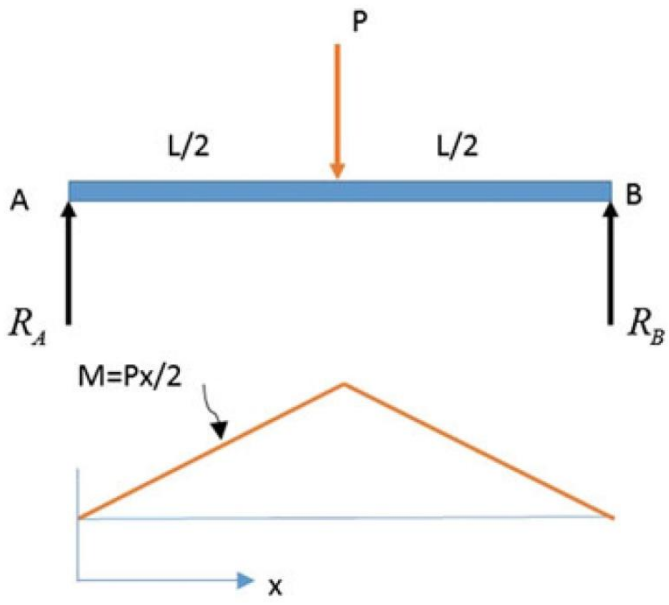
۸,۵,۴ بیشینه تنش در میله مساله ۸,۵,۳ چقدر است؟

۸,۵,۵ کمینه تنش در میله مساله ۸,۵,۳ چقدر است؟

پیوست: پاسخها

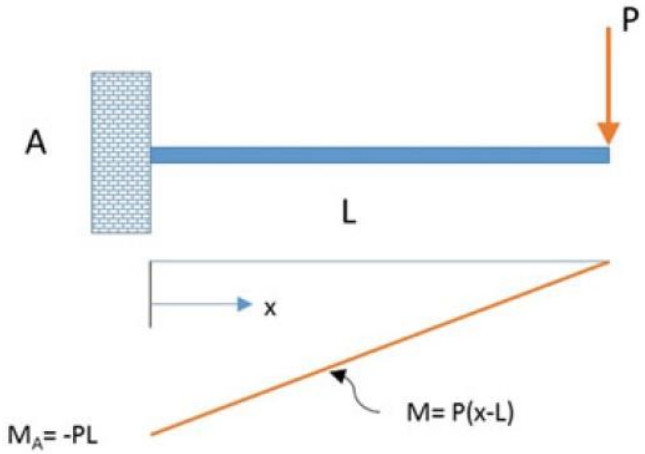
۸,۵,۱ تغییرات گشتاور خمشی برای تیر تکیه گاه ساده بارگذاری شده مطابق با شکل زیر را ترسیم کنید.

پاسخ:



۸,۵,۲ تغییرات گشتاور خمشی برای تیر یکسرگیردار بارگذاری شده مطابق با شکل زیر را ترسیم کنید.

پاسخ:



۸,۵,۳ شعاع انحنای یک میله مربعی آلومینیومی به ضلع مقطع 2 اینچ که تحت گشتاور خمشی M=150 ft-lbs قرار گرفته است چقدر است؟

پاسخ:

با استفاده از رابطه (۸,۷):

$$\rho(x) = \frac{EI}{M(x)}$$

$$\rho = \frac{(10*10^6)\left(\frac{2*2^3}{12}\right)}{150*12} = \frac{(10*10^6)\left(\frac{16}{12}\right)}{150*12} = \frac{16*10^6}{15*12*12} = 0.0074*10^6$$

$$= 7,400 \text{ in.} = 616.67 \text{ ft.}$$

۸,۵,۴ بیشینه تنش در میله مساله ۸,۵,۳ چقدر است؟

پاسخ:

برای گشتاور مثبت، بیشینه تنش کششی در سطح زیرین تیر رخ می دهد:

$$\sigma_{xx}^{\max} = -\frac{150 * 12}{\frac{(2*2^3)}{12}}(-1) = \frac{150 * 144}{16} = 1,350 \text{ psi}$$

۸,۵,۵ کمینه تنش در میله مساله ۸,۵,۳ چقدر است؟

پاسخ:

تنش در سطح بالایی میله فشاری (یعنی منفی) است و اندازه آن با تنش در سطح زیرین میله برابر است. بنابراین:

$$\sigma_{xx}^{Min} = -1,350\ psi$$

فصل ۹
تیر در معرض بارگذاری عرضی

۹,۱ تعادل

یک تیر منشوری که سطح مقطع آن دارای صفحه تقارن باشد (این صفحه تقارن از مرکز سطح سطح مقطع می گذرد (شکل ۸,۳)) و وضعیت استاتیکی معینی دارد (یعنی همه نیروها و گشتاورها را می توان مستقیما از معادلات تعادل به دست آورد) و نیز خط اثر همه بارهای خارجی در صفحه تقارن سطح مقطع قرار دارد را در نظر بگیرید. شکل ۹,۱ یک تیر تکیه گاه ساده که در معرض ترکیبی از بارهای متمرکز عرضی P_i و بار گسترده $q(x)$ قرار گرفته است را نشان می دهد.

معادلات توزیع نیرو و گشتاور را می توان به نمودار جسم آزاد کل تیر اعمال کرد تا عکس العملهای تکیه گاهی را تعیین کرد. با تعیین عکس العملهای تکیه گاهی، تعادل نمودار جسم آزاد از یک مقطع دلخواه تیر، مانند آنچه در شکل ۹,۲ نشان داده شده است، می تواند برای تعیین نیروی برشی عرضی V(x) و گشتاور خمشی M(x) در هر موقعیت x از طول تیر به کار رود. ما با این تعریف که گشتاور مثبت، تنش کششی زیر تار خنثی ایجاد می کند، تحلیل را انجام می دهیم. برای نیروی برشی V(x)، نیروی V را هنگامی مثبت تعریف می کنیم که نیروی برشی روی وجه سمت راست نشان داده شده به سمت پایین باشد.

تغییرات M(x) و V(x) در طول تیر برای ارزیابی نیروها، گشتاورها، تنشها، و خیزها در طول کل تیر می تواند بسیار سودمند باشد. به عنوان گام نخست، نیروها و گشتاورها بر روی مقطع یک المان از تیر به طول dx که در معرض بار گسترده q(x) قرار گرفته است را در نظر بگیرید (شکل ۹,۳).

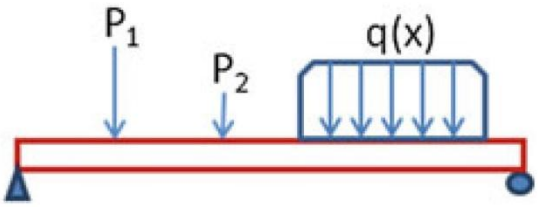
تعادل نیرو راستای عمودی، نرخ تغییر نیروی برشی را به عنوان تابعی از بار گسترده می دهد:

(۹,۱)

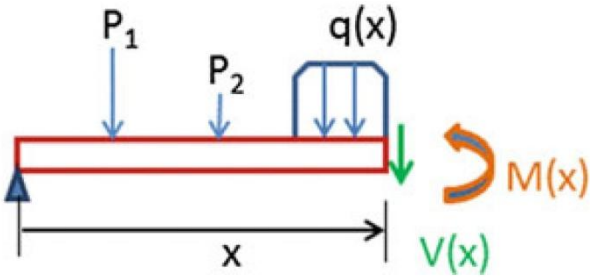
تعادل گشتاور مقطع المان، نرخ تغییر گشتاور را برحسب تابعی از نیروی برشی می دهد:

(۹,۲)

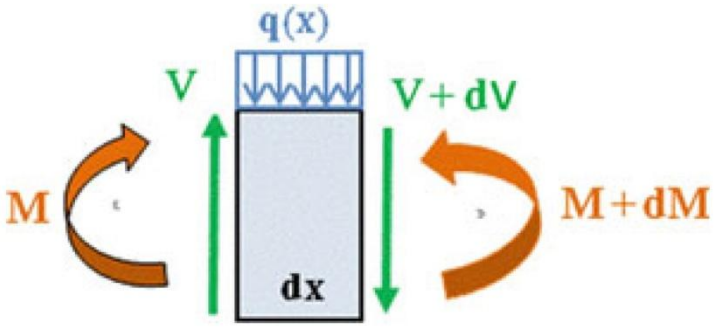
در حالتهای نیروها یا گشتاورهای متمرکز اعمالی در نقاط مشخص در راستای طول تیر، این دو معادله را می توان اصلاح کرد (گره و تیموشنکو).



شکل ۹,۱ تیر تحت بارهای عرضی



شکل ۹,۲ نمودار جسم آزاد مقطع تیر



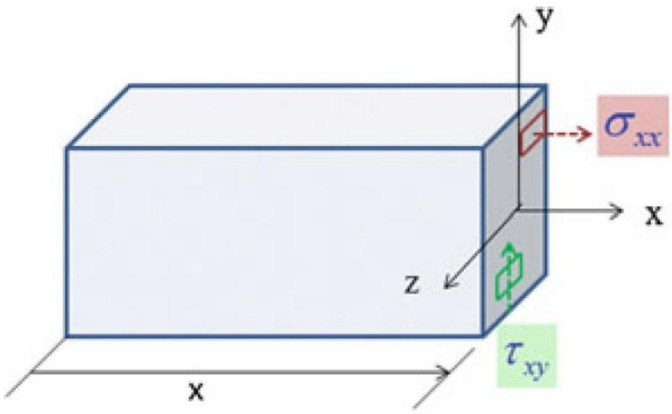
شکل ۹,۳ مقطع المان تیر

۹,۲ تنشها در تیرهای تحت بارگذاری عرضی

۹,۲,۱ تنشهای نرمال

وجود گشتاور M(x) و نیروی برشی V(x) در سطح مقطع یک تیر نشان می دهد که باید بر آن مقطع تیر، تنشهای نرمال σ_{xx} و تنشهای برشی τ_{xy} اعمال شود (شکل ۹,۴). تنشهای نرمال از وجود تنشهای برشی تاثیر نمی گیرند و از اینرو آنها برحسب گشتاور M(x) که تابعی از موقعیت در راستای تیر است، تعریف می شوند. طبق رابطه (۸,۸)، می توان نوشت:

(۹,۳)

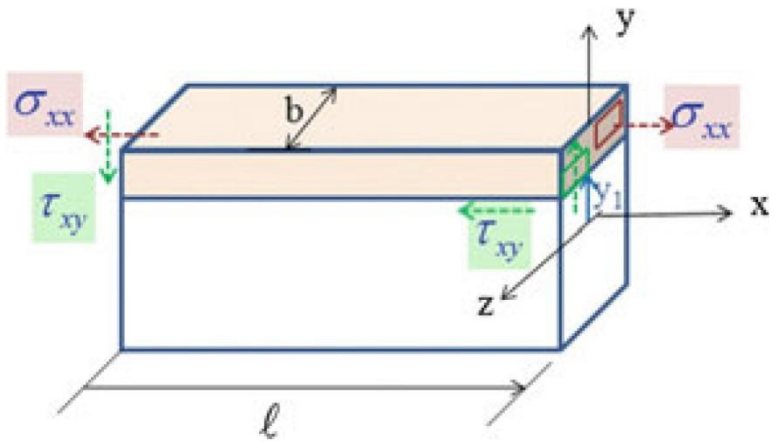


شکل ۹,۴ تنشهای برشی و نرمال بر روی سطح مقطع تیر

۹,۲,۲ تنش برشی

اندازه تنشهای برشی به عنوان تابعی از موقعیت y بر روی سطح مقطع تیر متغیر است. این موضوع برگرفته از این واقعیت است که تنش برشی τ_{xy} باید بر روی بخشی از سطح مقطع تیر غیرصفر باشد تا نیروی برشی عرضی V را ایجاد کند و در عین حال، باید در سطوح بالایی و صفر باشد تا شرط صفر بودن تنش برشی بر روی سطوح آزاد از تنش برآورده شود. اکنون پرسش آن است که τ_{xy} چگونه با y تغییر می کند؟

از بحث تنش در بخش ۲,۲ می دانیم که اگر تنشهای برشی بر روی یک وجه از المان ماده وجود داشته باشد، باید بر روی سایر وجوه نیز وجود داشته باشد به گونه ای که تنشها معادل زوجهایی باشند که المان در حالت تعادل باشد. شکل ۲,۲ تنشهای برشی متعادل برای تنش صفحه ای را نشان می دهد. پاسخ پرسش فوق با در نظر گرفتن نمودار جسم آزاد مقطع عرضی تیر به طول dx و عرض b در $y = y_1$ مشخص می شود (شکل ۹,۵).



شکل ۹,۵ تنشها در مقطع تیر تحت بارگذاری عرضی

تعادل نیروها در راستای محوری (x) رابطه ای برای تنش برشی در $y = y_1$ می دهد.

$$\int_{A_1} \sigma_{xx} dA + \int_{A_2} \tau_{xy} b dx - \int_{A_3} \sigma_{xx} dA = 0 \qquad (۹,۴)$$

در معادله فوق، A_1 و A_3، مساحتهای (مساوی) سطح مقطعهای عرضی بالای خط $y = y_1$ و A_2 مساحت (lb) مقطع (افقی) در $y = y_1$ است، که بر روی آن تنش برشی اعمال می شود. با اعمال معادله تنش نرمال برحسب گشتاور خمشی (۹,۳)، جمع (جبری) انتگرالها بر روی A_1 و A_3 به صورت زیر در می آید:

$$\int_{A_1} -\frac{ydM}{I}dA \equiv -\frac{dM}{I}\int_{A_1} ydA \qquad (۹,۵)$$

اکنون تنش برشی τ_{xy} در $y = y_1$ یک مقدار خاص است و از اینرو، با ترکیب روابط (۹,۴) و (۹,۵) تنش برشی به صورت زیر به دست می آید:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{Ib}\left(\frac{dM}{dx}\right)\int_{A_1} ydA \qquad (۹,۶)$$

با استفاده از تساوی $dM/dx = V(x)$ از رابطه (۹,۲)، و تعریف انتگرال روی سطح A_1 بالای $y = y_1$ به صورت $Q \equiv \int_{A_1} ydA$، تنش برشی در موقعیت $y = y_1$ از رابطه زیر به دست می آید:

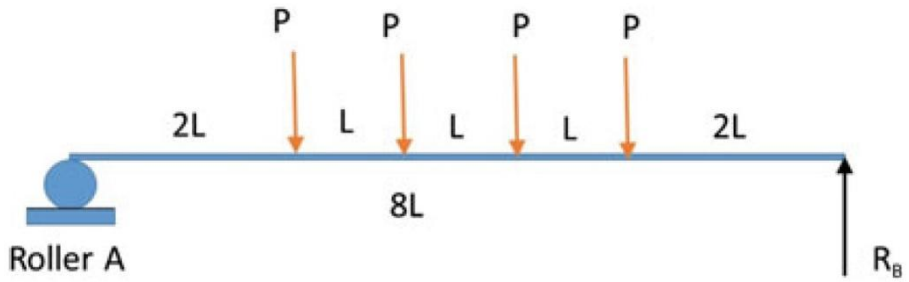
$$\tau_{xy}\Big|_{y=y_1} = \frac{V(x)Q(y_1)}{Ib} \qquad (۹,۷)$$

مشاهده می شود که این معادله، شرایط مرزی $\tau_{xy} = 0$ در سطوح بالایی و پایینی را برآورده می کند زیرا برای این مقادیر y، مقدار $Q(y_1) = 0$ است. این معادله همچنین نشان می دهد که تنش برشی در راستای تیر در موقعیت x که مربوط به به V(x) بیشینه است، بیشترین مقدار خود را داراست.

رابطه (۹,۷) برای برآورد تنش برشی در تیر در معرض بارگذاری عرضی، یک رابطه اساسی است.

۹,۳ تمرینها

۹,۳,۱ تغییرات نیروی برشی V در راستای تیر نشان داده شده در شکل زیر را ترسیم کنید.



۹,۳,۲ تغییرات گشتاور M در راستای تیر مساله ۹,۳,۱ را ترسیم کنید.

۹,۳,۳ رابطه ای برای بیشینه تنش کششی ناشی از خمش در تیر مساله ۹,۳,۱ به دست آورید اگر سطح مقطع تیر مستطیلی به ارتفاع 2h و پهنای h باشد.

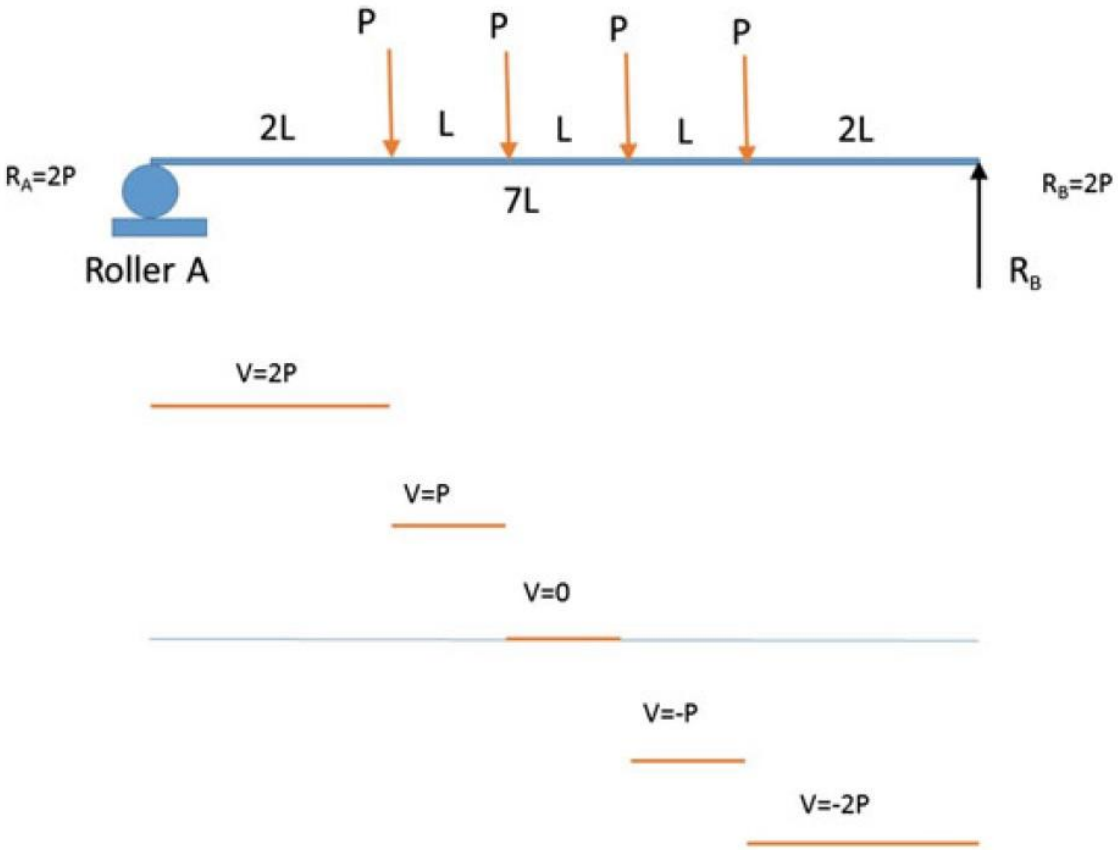
۹,۳,۴ رابطه ای برای بیشینه تنش برشی مساله ۹,۳,۳ به دست آورید.

۹,۳,۵ بیشینه تنش نرمال فشاری برای تیر مساله ۹,۳,۳ چقدر است و در چه موقعیتی رخ می دهد؟

پیوست: پاسخها

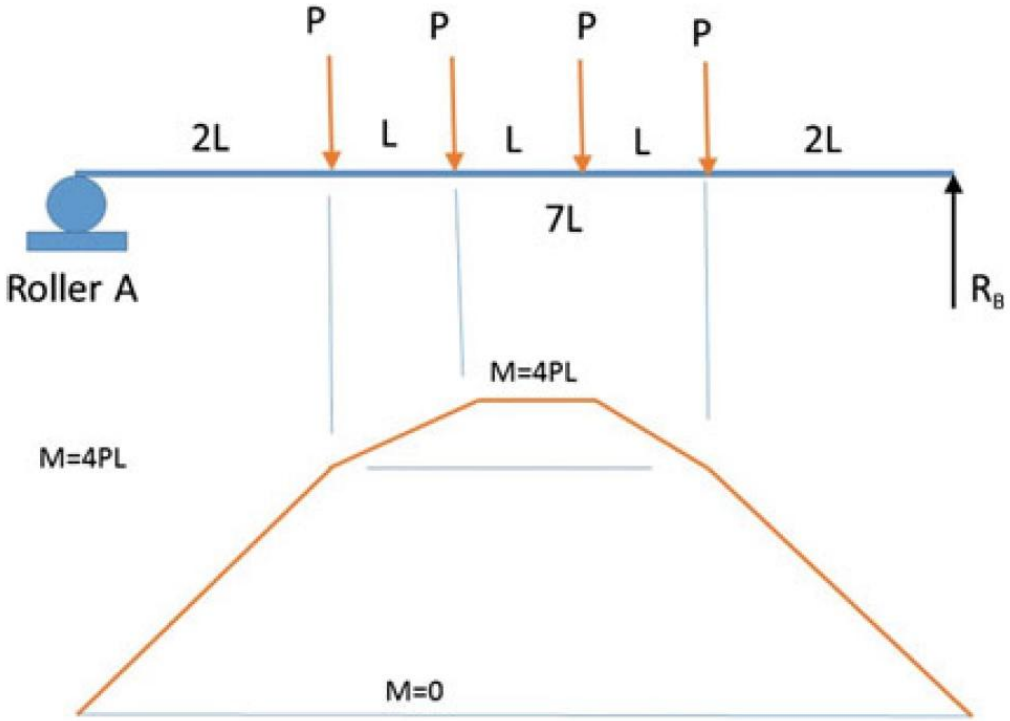
۹,۳,۱ تغییرات نیروی برشی V در راستای تیر نشان داده شده در شکل زیر را ترسیم کنید.

پاسخ:



۹,۳,۲ تغییرات گشتاور M در راستای تیر مساله ۹,۳,۱ را ترسیم کنید.

پاسخ:



۹,۳,۳ رابطه ای برای بیشینه تنش کششی ناشی از خمش در تیر مساله ۹,۳,۱ به دست آورید اگر سطح مقطع تیر مستطیلی به ارتفاع 2h و پهنای h باشد.

پاسخ:

۹,۳,۴ رابطه ای برای بیشینه تنش برشی مساله ۹,۳,۳ به دست آورید.

پاسخ:

$\tau_{xy}|_{y}$

۹,۳,۵ بیشینه تنش نرمال فشاری برای تیر مساله ۹,۳,۳ چقدر است و در چه موقعیتی رخ می دهد؟

پاسخ:

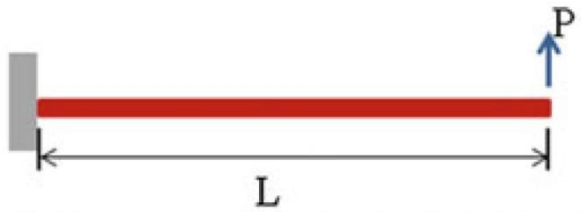
اندازه این تنش با تنش کششی برابر است، با این تفاوت که در سطح بالای تیر رخ می دهد.

فصل ۱۰
خیز تیر

۱۰,۱ ملاحظات کلی

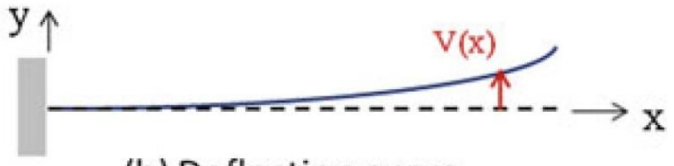
تیرهایی که در معرض بار قرار می گیرند با انحنای بررسی شده در فصل ۸ تغییر شکل می یابند. این انحنا با جابجایی (خیز) همراه است. طبق دستگاه مختصات و بارگذاریهایی که پیشتر اشاره شد، این خیزها (که با v مشخص می شود) در راستای y یا عمود می باشند این خیزها در طراحی می تواند اهمیت داشته باشد. در این بخش ما میله های منشوری از مواد الاستیک خطی همسانگرد تحت گشتاورهای خمشی و بارهای عرضی معین استاتیکی را درنظر می گیریم، به گونه ای که خیزها کوچک بوده و در صفحه x-y تیر قرار دارند. صفحه x-y صفحه تقارن است. مساله عبارت است از تعیین v(x)، تغییرات جابجایی عمودی تیر، v، نسبت به موقعیت x در راستای طول تیر. از آنجا که تیر معین استاتیکی است، عکس العملهای تکیه گاهی را می توان از معادلات تعادل نیرو و گشتاور استاتیک به دست آورد.

مطابق با رویکرد گره و تیموشنکو (۱۹۹۷)، مساله تیر یکسرگیردار که نیروی متمرکز به انتهای آزاد آن اعمال شده مورد بررسی قرار می گیرد. در شکل ۱۰,۱ تیر بارگذاری شده و منحنی خیز v(x) نشان داده شده است.



(a) Cantilever beam under concentrated load P

الف) تیر یکسر گیردار تحت بار متمرکز P



(b) Deflection curve

ب) منحنی خیز

شکل ۱۰,۱ تیر یکسرگیردار

۱۰,۲ معادلات خیز

از شکل ۸,۵ مشخص است که شعاع انحنا با طول المان کمان در راستای منحنی تغییر شکل یافته با رابطه زیر ارتباط دارد:

(۱۰,۱)

در بسیاری از موارد، خیز تیر (V) و شیب آن (θ) بسیار اندک است و می توان از تقریب $ds \approx dx$ استفاده کرد. از اینرو:

(۱۰,۲)

همچنین برای زاویه های بسیار اندک،

(۱۰,۳)

از اینرو، با مشتق گیری از θ در رابطه (۱۰,۳):

(۱۰,۴)

ترکیب روابط (۱۰,۲) و (۱۰,۴) رابطه ای میان شعاع انحنا و خیز عمودی می دهد:

(۱۰,۵)

ترکیب رابطه (۱۰,۵) با رابطه انحنا و گشتاور (۸,۶) رابطه دیفرانسیل مرتبه دوم اساسی میان خیز v، گشتاور M، مدول E، و ممان اینرسی I می دهد.

(۱۰,۶)

علامت پریم (′) به کار رفته در رابطه (۱۰,۶) به معنی مشتق گیری نسبت به x است (یعنی $v'' = \frac{d^2v}{dx^2}$).

از این نماد مشتق برای ساده کردن نگارش معادلات استفاده می شود.

ترکیب روابط (۱۰,۵) و (۱۰,۶) رابطه میان انحنا و گشتاور خمشی را می دهد:

(۱۰,۷)

با مشتق گیری بیشتر از رابطه (۱۰,۶) و استفاده از روابط (۹,۱) و (۹,۲)، روابطی برحسب نیروی برشی *V(x)* و بار گسترده عرضی *q(x)* به دست می آید:

(۱۰,۸)

(۱۰,۹)

در این تحلیل فرض شده که همه کمیتهای بارگذاری توابعی معین از موقعیت *x* در راستای طول تیر است. انتگرال گیری از این معادلات دیفرانسیل، ثابتهای مجهولی را به دست می دهد که باید از شرایط مرزی مشخص مانند خیز *v*، شیب *dv/dx* (*v′*)، نیروی برشی *V*، یا گشتاور *M* در نقاط معین از طول تیر، تعیین شوند. انتگرال گیری از رابطه گشتاور (۱۰,۶) نتیجه زیر را می دهد:

$$EIv' = \int_x M(x)dx + C_1 \qquad (۱۰,۱۰)$$

و از انتگرال گیری مجدد، رابطه زیر به دست می آید:

$$EIv = \iint_x (M(x)dx)dx + \int_x C_1 dx + C_2 \qquad (۱۰,۱۱)$$

که در آن دو ثابت انتگرال گیری C_1 و C_2 ظاهر شده است.

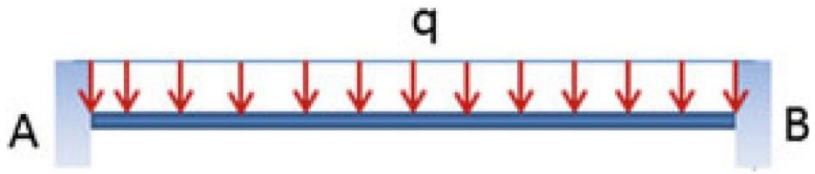
از دو رابطه (۱۰,۹) و (۱۰,۱۰) در می یابیم که *M(x)* باید به عنوان تابعی از *x* مشخص باشد تا بتوان انتگرال گیری نمود. برای تیرهای معین استاتیکی، *M(x)* را می توان از معادلات تعادل تعیین کرد. اگر بارگذاری در طول تیر پیوسته نباشد (مانند اعمال بارهای متمرکز در نقاط مشخصی از تیر)، انتگرال گیری باید بر روی بخشهایی از تیر که بارگذاری پیوسته است انجام شود. سپس حل کامل برای خیز تیر بر روی کل طول تیر با انطباق شیبها و خیزها در نقاط بارگذاری ناپیوسته به دست می آید.

مقادیر ثوابت مجهول مستقیما از شرایط مرزی معلوم و شرایط پیوستگی به دست می آید. در تکیه گاه ساده، *v'=0*؛ شرایط پیوستگی در نقاط طول تیر به معنی آن است که $v_1 = v_2$ و $v'_1 = v'_2$، که در آن زیروندهای ۱ و ۲ مربوط به موقعیتهای دو طرف نقطه ای می باشد که در آن بارگذاری ناپیوسته است، مانند نقطه ای که بار متمرکز اعمال شده است.

۱۰,۳ تیرهای نامعین استاتیکی

مسایل زیادی وجود دارد که عکس العملهای نیرو و گشتاور در تکیه گاه ها را نمی توان مستقیما از روابط استاتیکی به دست آورد. این تیرها را نامعین استاتیکی می نامند. از اینرو، مجموعه معادلاتی که برای تعیین همه مجهولات به کار می رود باید شامل همه شرایط مرزی و شرایط پیوستگی، و نیز معادلات تعادل نیرو و گشتاور باشد. مثالی از تیر نامعین استاتیکی، تیر دو سرگیردار با بار یکنواخت است که در شکل ۱۰,۲ نشان داده شده است.

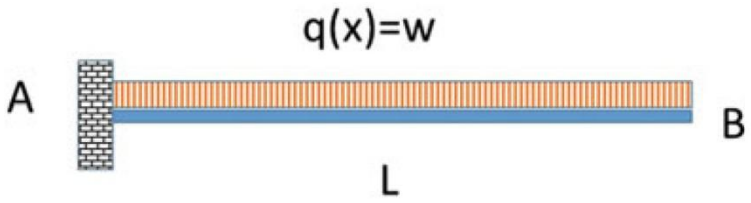
برای این تیر، شش مجهول داریم: نیروهای عکس العمل در نقاط *A* و *B*، گشتاورهای عکس العمل در *A* و *B*، و دو ثابت انتگرال گیری C_1 و C_2. همچنین برای یافتن این شش مجهول، شش معادله نیز وجود دارد: *v=0* در *A* و *B*، *v'=0* در *A* و *B*، تعادل نیروهای کل $\sum F_x = 0$، $\sum F_y = 0$ و تعادل گشتاور کل $\sum M_z = 0$.



شکل ۱۰,۲ تیر نامعین استاتیکی

۱۰,۴ تمرینها

۱۰,۴,۱ گشتاور خمشی M در A (x=0) برای تیر یکسرگیردار با بارگذاری نشان داده شده در شکل زیر را به دست آورید.



۱۰,۴,۲ چهار شرط مرزی برای تیر مساله ۱۰,۴,۱ چیست؟

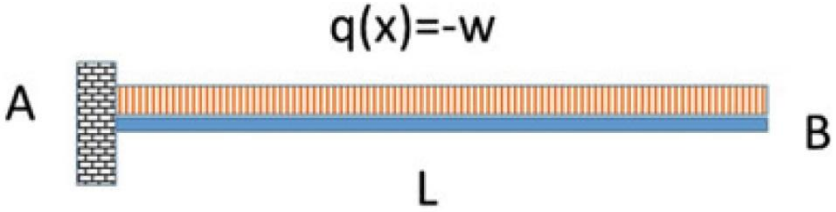
۱۰,۴,۳ شیب تیر در مساله ۱۰,۴,۱ را در نقطه انتهایی x=L به دست آورید.

۱۰,۴,۴ خیز تیر در مساله ۱۰,۴,۱ را در نقطه انتهایی x=L به دست آورید.

۱۰,۴,۵ شعاع انحنای تیر در مساله ۱۰,۴,۱ را در نقطه انتهایی x=L به دست آورید.

پیوست: پاسخها

۱۰,۴,۱ گشتاور خمشی M در A (x=0) برای تیر یکسرگیردار با بارگذاری نشان داده شده در شکل زیر را به دست آورید.



پاسخ:

از تعادل گشتاور:

$$M_A = \int_0^L x(wdx) = \frac{-wL^2}{2}$$

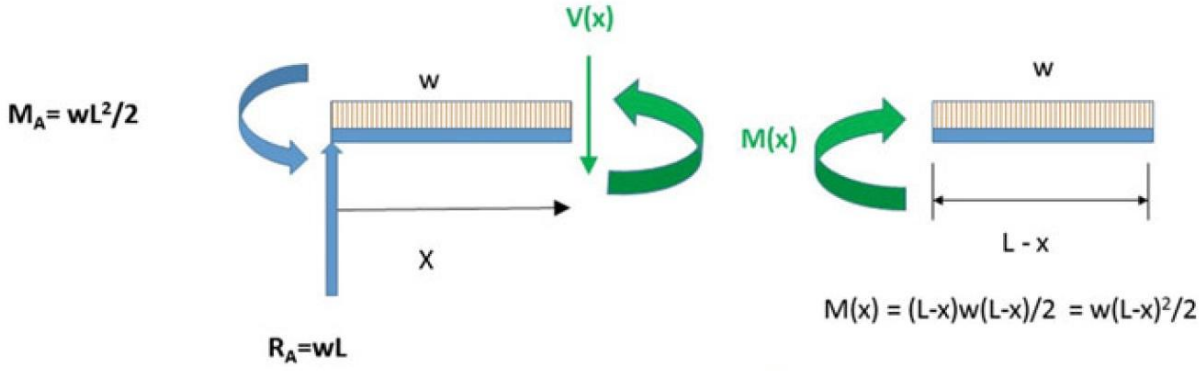
۱۰,۴,۲ چهار شرط مرزی برای تیر مساله ۱۰,۴,۱ چیست؟

پاسخ:

$$v(0) = 0; \quad v'(0) = 0: \quad M(L) = 0; \quad V(L) = 0$$

۱۰,۴,۳ شیب تیر در مساله ۱۰,۴,۱ را در نقطه انتهایی x=L به دست آورید.

پاسخ:



نمودارهای جسم آزاد دو بخش از تیر
Free Body Diagrams of a portion of beam

از رابطه (۱۰,۱۰):

$$EIv'(x) = \int_0^x M(x)dx + C_1 = \int_0^x w\frac{(L-x)^2}{2}dx + C_1$$

$$EIv'(x) = \frac{w}{2}\frac{(L-x)^3}{3} + C_1 = \frac{w}{6}\left[L^3 - 3xL^2 + 3x^2L - x^3\right] + C_1$$

$$EIv'(0) = 0 = \frac{w}{6}L^3 + C_1 \quad \Rightarrow C_1 = -\frac{wL^3}{6}$$

$$EIv'(L) = \frac{w}{6}\left[L^3 - 3L^3 + 3L^3 - L^3\right] - \frac{wL^3}{6}$$

$$v'(L) = -\frac{wL^3}{6EI}$$

۱۰,۴,۴ خیز تیر در مساله ۱۰,۴,۱ را در نقطه انتهایی x=L به دست آورید.

پاسخ:

با استفاده از نتیجه حل مساله ۱۰,۴,۳:

$$EIv'(x) = \frac{w}{2}\frac{(L-x)^3}{3} - \frac{wL^3}{6}$$

پس از انتگرال گیری:

$$EIv(x) = \frac{-w}{6}\frac{(L-x)^4}{4} - \frac{w}{6}L^3x + C_2$$

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow 0 = -\frac{w}{24}L^4 + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{wL^4}{24}$$

$$v(L) = -\frac{wL^4}{6EI} + \frac{wL^4}{24EI} = \frac{wL^4}{EI}\left(-\frac{4}{24} + \frac{1}{24}\right) = -\frac{3wL^4}{24EI}$$

$$v(L) = -\frac{wL^4}{8EI}$$

۱۰,۴,۵ شعاع انحنای تیر در مساله ۱۰,۴,۱ را در نقطه انتهایی x=L به دست آورید.

پاسخ:

با توجه به رابطه (۱۰,۷):

در x=L، گشتاور M(L) برابر با صفر است. بنابراین $\rho = \infty$، در نقطه انتهایی x=L، تیر صاف و بدون انحنا است.

مرجع:

Gere, J. M., & Timoshenko, S. P. (1997). Mechanics of materials (4th ed.). PWS Publishing Co.

فصل ۱۱
اثرات حرارتی

۱۱,۱ کرنشهای حرارتی

اغلب مواد هنگامی که در معرض تغییرات دمایی قرار می گیرند دچار کرنش اتساعی (تغییر اندازه) می شوند. برای مواد همسانگرد آزاد از تنش، کرنشهای حرارتی اتساعی، ε^T در همه جهات یکسان بوده و برحسب ضریب انبساط حرارتی α و تغییر دما ΔT به این صورت بیان می شود:

(۱۱,۱)

مواد همسانگرد هنگامی که در معرض تغییر دما قرار می گیرند کرنش برشی بروز نمی دهند. از کرنشهای حرارتی غالبا با عنوان کرنشهای حرارتی آزاد یاد می شود. برای ماده الاستیک خطی که در معرض دو نوع کرنش مکانیکی (یعنی وابسته به تنش) و کرنش حرارتی آزاد قرار گرفته است، کرنش کل، ε، مجموع کرنشهای مکانیکی ε^σ و کرنشهای حرارتی ε^T است. از اینرو، کرنش کل در راستای x برابر است با:

(۱۱,۲)

۱۱,۲ تنشهای حرارتی

با جایگذاری روابط کرنشهای مکانیکی برحسب تنشها (مثلا رابطه ۶,۱) و کرنشهای حرارتی برحسب عبارت $\alpha\ \Delta T$، می توانیم تنشهای حرارتی برحسب کرنش کل ε_{xx}، کرنش حرارتی $\alpha\ \Delta T$ و مدول الاستیک E را به دست آوریم. برای وضعیت یک بعدی تنش σ_{xx}، نتیجه برابر است با:

(۱۱,۳)

به عنوان مثال، میله ای را در نظر بگیرید که میان دو دیواره هموار بدون اصطکاک مقید شده است (شکل ۱۱,۱) و در معرض تغییر دمای ΔT قرار گرفته است، کرنش محوری کل $\varepsilon_{xx} = 0$ است و از اینرو تنشهای محوری در میله فشاری بوده و از این رابطه به دست می آید:

(۱۱,۴)

در اینجا فرض می شود که به دلیل هموار و بدون اصطکاک بودن دیواره ها، میله می تواند آزادانه در راستاهای جانبی منبسط شود.

شکل ۱۱,۱ میله مقید شده میان دو دیواره هموار

۱۱,۳ تمرینها

۱۱,۳,۱ تغییر حجم یک مکعب به طول h که در معرض تغییر دمای یکنواخت ΔT قرار گرفته است را به دست آورید اگر مکعب بتواند آزادانه در همه جهات منبسط شود.

۱۱,۳,۲ تغییر طول کل δ برای میله ای محوری به طول L را به دست آورید که در معرض تغییر دمای ΔT و نیروی محوری P قرار گرفته است، اگر میله، مدول E، ضریب انبساط حرارتی α، نسبت پواسون ν، و مساحت سطح مقطع A داشته باشد.

۱۱,۳,۳ کرنش جانبی میله در تمرین ۱۱,۳,۲ چقدر است؟

۱۱,۳,۴ تنش محوری در میله ای که دو انتهای آن میان دو دیواره بدون اصطکاک مقید شده و در معرض تغییر دمای ΔT قرار گرفته است چقدر است؟

پیوست: پاسخها

۱۱,۳,۱ تغییر حجم یک مکعب به طول h که در معرض تغییر دمای یکنواخت ΔT قرار گرفته است را به دست آورید اگر مکعب بتواند آزادانه در همه جهات منبسط شود.

پاسخ:

از رابطه (۱۱,۲):

و به طور مشابه در بقیه راستاها داریم:

از آنجا که همه تنشها صفر است، کرنشها تنها مولفه های کرنشهای آزاد حرارتی می باشد:

اضلاع منبسط شده برابر اند با:

$$\Delta V = [h(1+\alpha\Delta T)]^3 - h^3$$
$$\Delta V = h^3(1+\alpha\Delta T)^3 - h^3$$
$$\Delta V = h^3\left(1+3\alpha\Delta T+3\alpha^2\Delta T^2+\alpha^3\Delta T^3\right) - h^3$$
$$\Delta V = h^3\left(3\alpha\Delta T+3\alpha^2\Delta T^2+\alpha^3\Delta T^3\right)$$

۱۱,۳,۲ تغییر طول کل δ برای میله ای محوری به طول L را به دست آورید که در معرض تغییر دمای ΔT و نیروی محوری P قرار گرفته است، اگر میله، مدول E، ضریب انبساط حرارتی α، نسبت پواسون ν، و مساحت سطح مقطع A داشته باشد.

پاسخ:

$$\delta = \frac{PL}{AE} + L\alpha\Delta T$$

۱۱,۳,۳ کرنش جانبی میله در تمرین ۱۱,۳,۲ چقدر است؟

پاسخ:

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{zz}\right) + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(0 - \nu\frac{P}{A} - 0\right) + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu P}{AE} + \alpha\Delta T$$

۱۱,۳,۴ تنش محوری در میله ای که دو انتهای آن میان دو دیواره بدون اصطکاک مقید شده و در معرض تغییر دمای ΔT قرار گرفته است چقدر است؟

پاسخ:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}\right) + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - 0 - 0\right) + \alpha\Delta T = 0$$

$$\sigma_{xx} = -E\alpha\Delta T$$

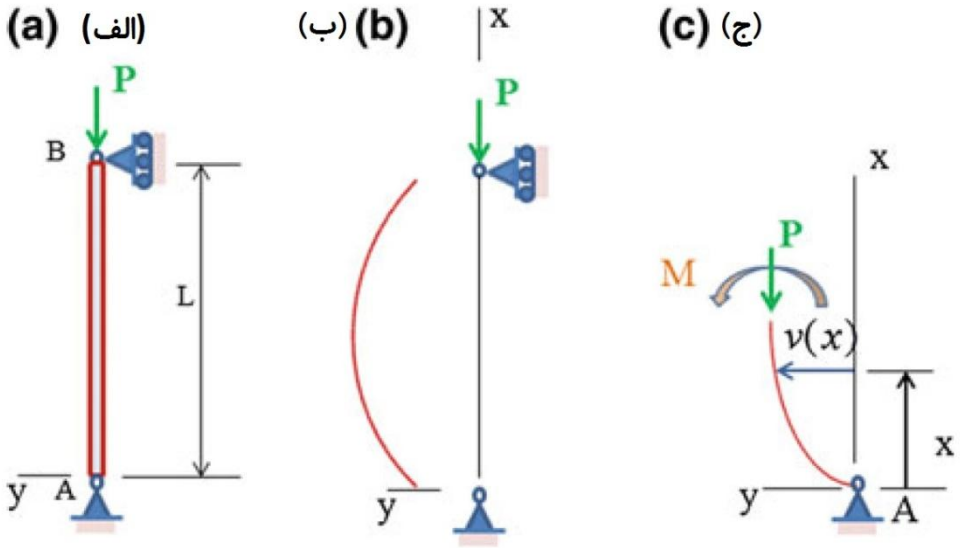
فصل ۱۲
پایداری

اغلب سازه های بزرگ که در دورانهای گذشته ساخته شده اند، مانند کلیساهای بزرگ، آرامگاه ها، مساجد، و کنیسه ها، سازه هایی هستند که اساسا تحت بار فشاری قرار دارند. هنگامی که عضوهای سازه ای تحت بارگذاری فشاری قرار می گیرند، مقداری حدی برای بار وجود دارد که تا آن مقدار، سازه پایدار می ماند. مثال ساده از این پاسخ سازه ای، نخ است که تحت بارگذاری کششی، نخ پایدار است ولی تحت بارگذاری فشاری، نخ ناپایدار است، یعنی دچار کمانش می شود. همانگونه که در ادامه نشان داده شده، باری که در آن عضو سازه ای دچار کمانش می شود تابعی از خواص ماده و هندسه عضو است. باری که در آن عضو کمانش می کند بار بحرانی نامیده می شود. اگر سازه کمتر از بار بحرانی تحت بار قرار گیرد، چنانچه اندکی از وضعیت پایدار خارج شود، مجددا به وضعیت پایدار برمی گردد؛ ولی اگر سازه اندکی بالاتر از بار بحرانی تحت بار قرار گیرد، هنگامی که دچار کوچکترین اغتشاش شود، کمانش خواهد کرد. نخستین تحلیل موفق مساله کمانش توسط اویلر (۱۷۴۴) برای میله های باریک در معرض بار فشاری محوری ارایه شد. مطالعات مفصل پایداری سازه ها توسط تیموشنکو و گره (۱۹۶۱) و بازانت و سدولین (۱۹۹۱) ارایه شده است.

۱۲,۱ کمانش اویلری

ستونی بلند و باریک با دو انتهای لولایی (یعنی با امکان دوران آزاد) را تحت بار محوری P مطابق با شکل ۱۲,۱ درنظر بگیرید (طبق تحلیل گره و تیموشنکو ۱۹۹۷). بار به مرکز سطح سطح مقطع ستون وارد می شود؛ ستون از ماده ای الاستیک خطی ساخته شده، کاملا مستقیم است، دارای طول L، ممان اینرسی سطح مقطع I است و فرض می شود فاقد هرگونه عیبی است. این مساله به نام کمانش اویلری شناخته می شود.

از نمودار جسم آزاد در شکل ۱۲,۱ (ج)، گشتاور خمشی (رابطه ۱۰,۶) برای ستون کمانش یافته برابر است با:



شکل ۱۲,۱ ستون انتهای مفصلی تحت فشار محوری. (الف) بارگذاری فشاری محوری به ستون انتهای مفصلی، (ب) ستون کمانش یافته، (ج) عکس العملهای داخلی ستون کمانش یافته

(۱۲,۱)

مرسوم است که هنگام حل معادله (۱۲,۱) پارامترها ترکیب شده و پارامتر زیر تعریف شود:

(۱۲,۲)

ترکیب دو رابطه فوق، معادله گشتاور خمشی را به صورت زیر می دهد:

(۱۲,۳)

جواب این معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم عبارت است از:

(۱۲,۴)

که در آن C_1 و C_2 ثوابت انتگرال گیری بوده که با شرایط مرزی مساله تعیین می شود. برای ستون انتهای مفصلی شکل ۱۲,۱، شرایط مرزی به این گونه است: جابجاییها در دو انتها برابر با صفر است:

(۱۲,۵)

طبق رابطه (۱۲,۴)، شرط مرزی در x=0 موجب می شود که $C_2 = 0$ باشد. بنابراین شکل منحنی خیز برای ستون انتهای مفصلی برابر است با:

(۱۲,۶)

شرط مرزی در x=L مستلزم آن است که $C_1 sin\ kL = 0$ باشد. اگر C_1 و C_2 هر دو صفر باشد، خیز صفر، جواب بدیهی این مساله خواهد بود. جواب غیربدیهی آن از معادله $sin\ kL = 0$ به دست می آید. بنابراین، برای آنکه جواب معادله غیربدیهی باشد، باید رابطه زیر برقرار باشد:

(۱۲,۷)

حالت *n=0* به منزله پاسخ بدیهی *v(x)=0* است که مدنظر نمی باشد. با ترکیب روابط (۱۲,۲) و (۱۲,۷) بار بحرانی کمانش P_{cr} به این صورت به دست می آید:

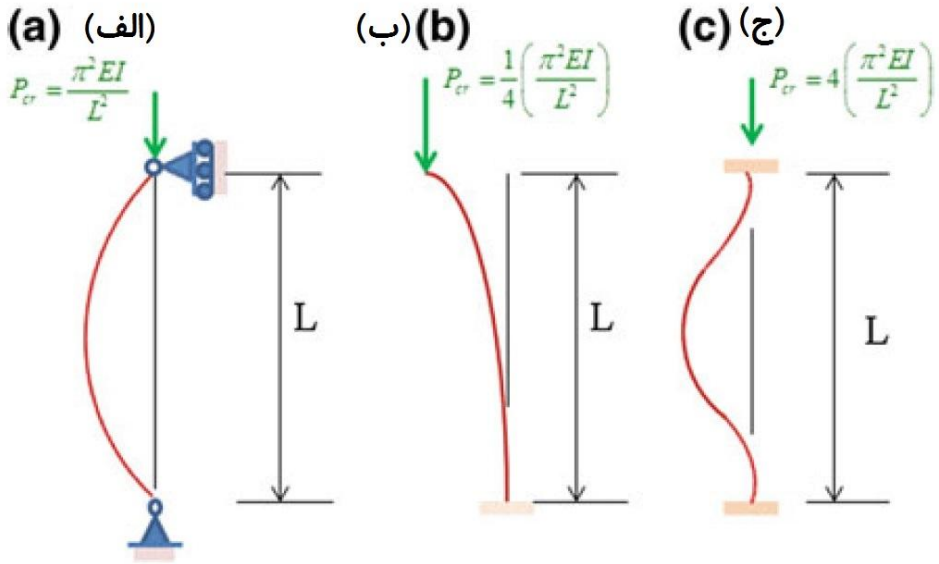
(۱۲,۸)

کمترین بار P که رابطه خیز را برآورده می کند در حالت $n=1$ رخ می دهد، و از اینرو،

(۱۲,۹)

این رابطه، معادله کمانش اویلر برای ستون انتهای مفصلی است. این رابطه نشان می دهد که بار بحرانی نسبت معکوس با مجذور طول L، و نسبت مستقیم با مدول الاستیسیته E، و گشتاور اینرسی سطح مقطع I دارد. از اینرو، ستونهای باریک بلند دارای بارهای بحرانی کمی هستند و ستونهای کوتاه ستبر، بارهای بحرانی بالایی دارند. شکل ستون خیز یافته برای $n=1$ یک موج سینوسی ساده است (شکل ۱۲,۱ ب) که در آن C_1 برابر با خیز در نقطه $L/2$ است. مقادیر بالاتر n مربوط به بارهای بحرانی بالاتر و شکل وضعیتهای کمانش بالاتر است.

بار کمانش بحرانی و شکل کمانش یافته ستون از شرایط تکیه گاهی تاثیر می پذیرد. شکل ۱۲,۲، مقایسه ای از ستونهای کمانش یافته برای سه نوع شرایط تکیه گاهی، مفصل–مفصل، گیردار–مفصل، گیردار–گیردار نشان داده شده است. روشن است که شرایط تکیه گاهی گیردار–گیردار بیشترین بار کمانش بحرانی را دارا است.



شکل ۱۲,۲ وضعیتهای کمانش شرایط تکیه گاهی ستون (الف) مفصل–مفصل، (ب) گیردار–آزاد، (ج) گیردار–گیردار

۱۲,۲ تمرینها

۱۲,۲,۱ نشان دهید که رابطه ۱۲,۴ پاسخ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم ۱۲,۳ است.

۱۲,۲,۲ بارهای کمانش بحرانی برای خط کش یک یاردی با انتهای دومفصل و خط کش یک فوتی با انتهای دومفصل و همان جنس و همان مساحت سطح مقطع را مقایسه کنید.

پیوست: پاسخها

۱۲,۲,۱ نشان دهید که رابطه ۱۲,۴ پاسخ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم ۱۲,۳ است.

پاسخ:

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

$$\begin{aligned} v'(x) &= C_1 k \cos kx - C_2 k \sin kx \\ v''(x) &= -C_1 k^2 \sin kx - C_2 k^2 \cos kx = k^2(-C_1 \sin kx - C_2 \cos kx) \\ \Rightarrow v'' + k^2 v &= -k^2(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + k^2(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) = 0 \end{aligned}$$

۱۲,۲,۲ بارهای کمانش بحرانی برای خط کش یک یاردی با انتهای دومفصل و خط کش یک فوتی با انتهای دومفصل و همان جنس و همان مساحت سطح مقطع را مقایسه کنید.

پاسخ:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$P_{cr}^{YS} = \frac{\pi^2 EI}{3^2} = \frac{\pi^2 EI}{9}$$

$$P_{cr}^{R} = \frac{\pi^2 EI}{1^2} = \pi^2 EI$$

بار بحرانی خط کش یک فوتی ۹ برابر خط کش یک یاردی است.

مراجع

Bažant, Z. P., & Cedolin, L. (1991). Stability of structures. Oxford: Oxford University Press.

Euler, L. (1933). Methods inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes …", Appendix I. "De curvis elasticis, Bousquet, Lausanne and Geneva, 1744 (W. A. Oldfather, C. A. Ellis, & D. M. Brown, Trans), Isis, vol. XX.

Gere, J. M., & Timoshenko, S. P. (1997). Mechanics of materials (4th ed.). PWS Publishing Co.

فصل ۱۳
مخازن فشار جدار نازک

بسیاری از سازه هایی که در زندگی روزمره به کار می روند مخازن جدار نازک می باشند. همانگونه که در شکل ۱۳,۱ نشان داده است، مخازن فشار جدار نازک، گستره وسیعی از آرایشها و کاربردها را دربرمی گیرد. مثالهای آن عبارتند از بالونها، بادکنکها و توپها، شیلنگها و لوله ها، مخازن کوچک و بزرگ، بخشهایی از هواپیماها و فضاپیماها. مخزن فشار هنگامی جدار نازک تلقی می شود که نسبت شعاع r به ضخامت دیواره t آن بزرگتر یا مساوی ۱۰ باشد. در ادامه، تنشها در کره های جدار نازک و استوانه های جدار نازک که در معرض فشار یکنواخت داخلی قرار گرفته اند مورد مطالعه قرار می گیرد.

۱۳,۱ مخزن فشار کروی

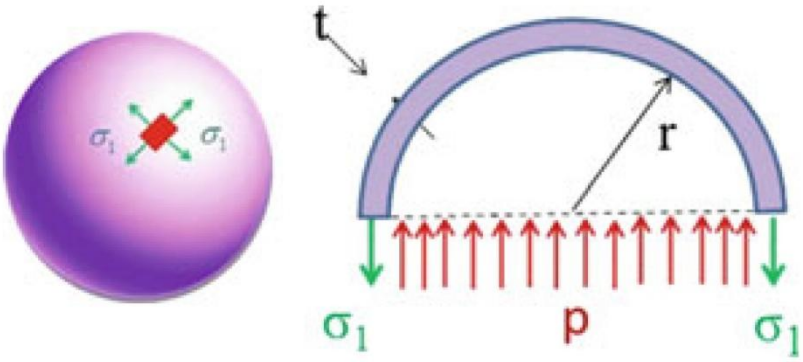
مخزن فشار جدار نازک کروی که از ماده الاستیک خطی با مدول E، و ضخامت دیواره t ساخته شده را درنظر بگیرید. شعاع داخلی کره r است و کره تحت فشار درونی p قرار گرفته است. از آنجا که ضخامت دیواره اندک است، فرض می کنیم که تنشهای نرمال در ضخامت دیواره با مکان تغییر نمی کند. همچنین فشار عمودی درونی برابر با p و فشار عمودی بیرونی برابر با صفر است، و تنشهای عمود بر ضخامت در مقایسه با تنشهای نرمال غشاء اندک است.

تقارن سازه سبب می شود که میدان یکنواختی از تنشهای نرمال بر همه نقاط دیواره کره اعمال شود. تنشهای برشی در کره صفر می باشد. تنش نرمال σ_1، فشار درونی p، شعاع درونی کره r، و ضخامت دیواره t می باشد. گفتنی است که برای کره های نازک، اختلاف میان شعاع داخلی و شعاع تا مرکز دیواره ناچیز است و می توان از آن چشم پوشی کرد.

نیروهای نشان داده شده در شکل ۱۳,۲ عبارت است از نیروی مربوط به σ_1 که بر محیط نیمکره وارد می شود و نیروی ناشی از فشار p که بر دایره سطح تصویر نیمکره وارد می شود و این دو نیرو با یکدیگر برابراند. با مشخص بودن تنشها، کرنشها را می توان از معادلات مشخصه به دست آورد.

(۱۳,۱)

شکل ۱۳,۱ مخازن فشار جدار نازک



شکل ۱۳,۲ نمودار جسم آزاد نیمکره

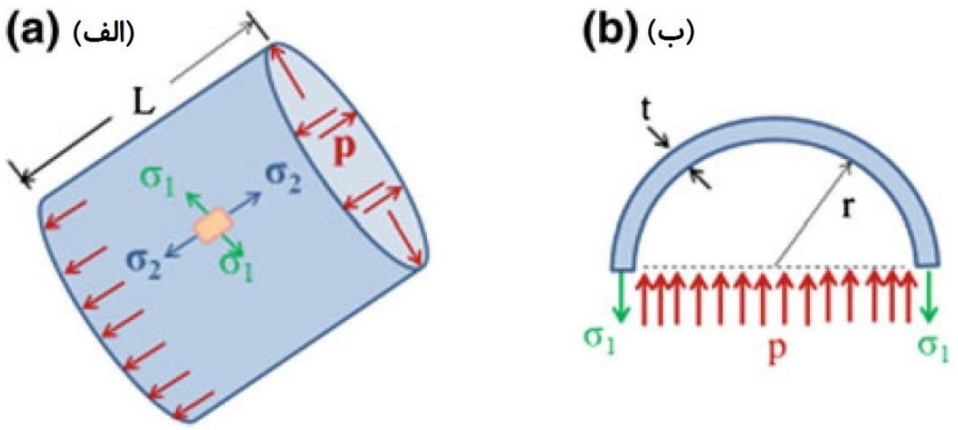
۱۳,۲ مخزن فشار استوانه ای

در مساله مخزن فشار استوانه ای جدار نازک، مانند یک لوله، دو تنش نرمال، یکی σ_1 که به صورت مماسی بر محیط پیرامون استوانه وارد می شود، و دیگری σ_2 که در راستای طول استوانه اعمال می شود وجود دارد (شکل ۱۳,۳ الف). تعادل نمودارهای جسم آزاد در شکل ۱۳,۳ روابطی را میان فشار درونی p، تنشهای محوری σ_2 و تنشهای مماسی σ_1 می دهد. تعادل در راستای محوری با این فرض است که دو انتهای استوانه بسته است.

(۱۳,۲)

(۱۳,۳)

بنابراین برای استوانه تحت فشار درونی، تنش مماسی (یا محیطی) σ_1 دو برابر تنش محوری σ_2 است.



شکل ۱۳,۳ نمودارهای جسم آزاد برای استوانه تحت فشار (الف) نمودار جسم آزاد تحت فشار (ب) نمودار جسم آزاد نیمه استوانه

۱۳,۳ تمرینها

۱۳,۳,۱ نشان دهید که رابطه (۱۳,۱) صحیح است.

۱۳,۳,۲ کرنشهای یک کره جدار نازک تحت فشار درونی p را برحسب دیگر مشخصات کره به دست آورید.

۱۳,۳,۳ نشان دهید که رابطه (۱۳,۲) صحیح است.

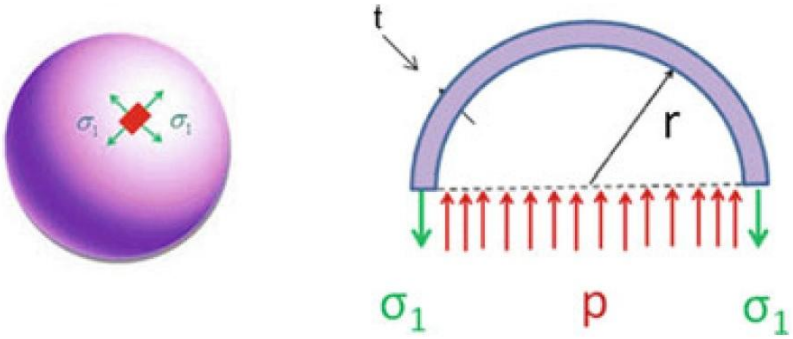
۱۳,۳,۴ نشان دهید که رابطه (۱۳,۳) صحیح است.

۱۳,۳,۵ توپهای بسکتبالی که توسط مردان استفاده می شود عموما قطر بیشتری نسبت به توپهای بسکتبال زنان دارد. اگر این توپها از جنس یکسانی ساخته شده و فشار درونی آنها یکسان باشد، نسبت ضخامت توپ مردان به توپ زنان چقدر است؟

پیوست: پاسخها

۱۳,۳,۱ نشان دهید که رابطه (۱۳,۱) صحیح است.

پاسخ:



$$\sum F = 0$$

$$\sigma_1 2\pi r t = p\pi r^2$$

$$\sigma_1 = \frac{pr}{2t}$$

۱۳,۳,۲ کرنشهای یک کره جدار نازک تحت فشار درونی p را برحسب دیگر مشخصات کره به دست آورید.

پاسخ:

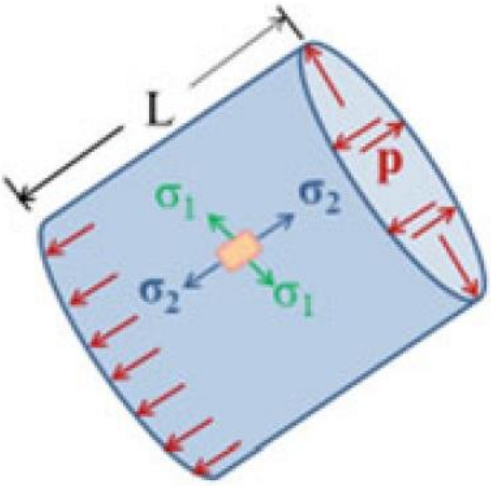
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{1}{E}\frac{pr}{2t}(1-\nu)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1$$

۱۳,۳,۳ نشان دهید که رابطه (۱۳,۲) صحیح است.

پاسخ:



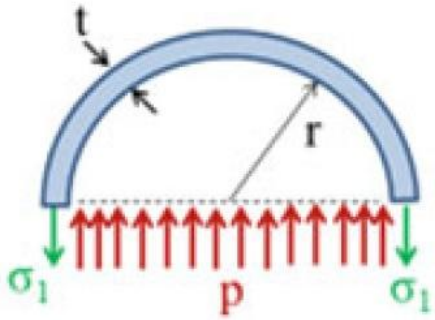
$$\sum F_2 = 0$$

$$\sigma_2 2\pi rt = p\pi r^2$$

$$\sigma_1 = \frac{pr}{2t}$$

a) Pressurized cylinder

(الف) استوانه تحت فشار



$$\sum F_1 = 0$$

$$\sigma_1 2Lt = p2rL$$

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t}$$

b) Half cylinder: free body diagram

(ب) نیمه استوانه: نمودار جسم آزاد

۱۳,۳,۴ نشان دهید که رابطه (۱۳,۳) صحیح است.

پاسخ:

در شکل بالا اثبات آن آورده شده است.

۱۳,۳,۵ توپهای بسکتبالی که توسط مردان استفاده می شود عموما قطر بیشتری نسبت به توپهای بسکتبال زنان دارد. اگر این توپها از جنس یکسانی ساخته شده و فشار درونی آنها یکسان باشد، نسبت ضخامت توپ مردان به توپ زنان چقدر است؟

پاسخ:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad \Rightarrow \frac{p}{2\sigma} = \frac{t_M}{r_M} = \frac{t_W}{r_W} \quad \Rightarrow \frac{t_M}{t_W} = \frac{r_M}{r_W}$$

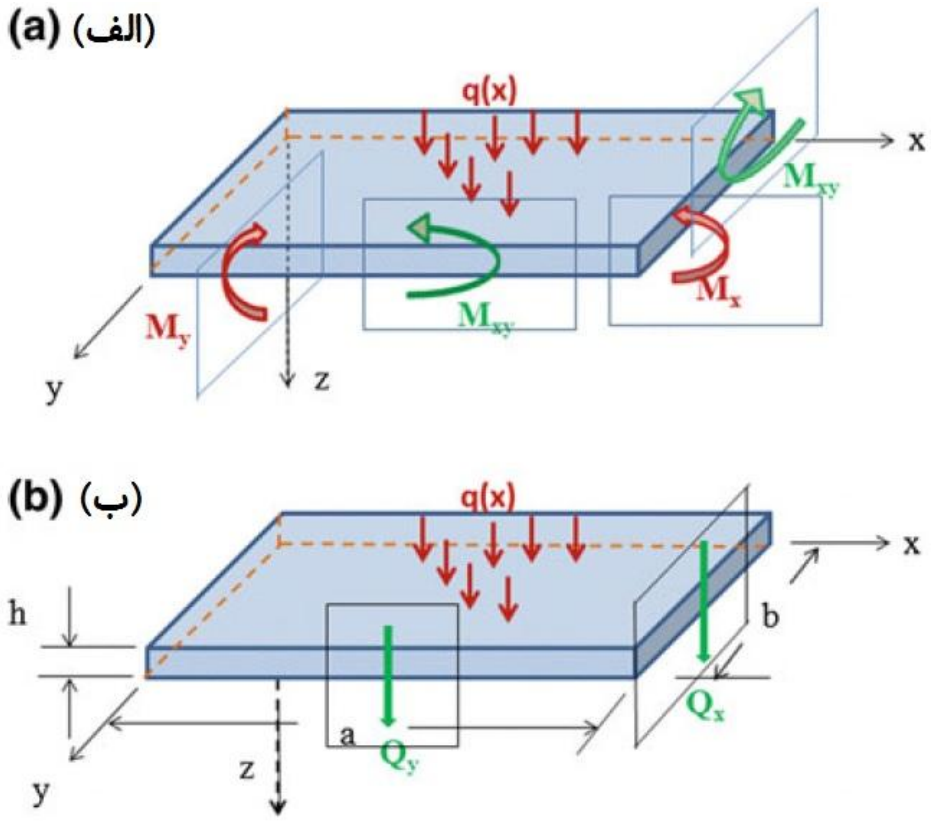
فصل ۱۴
ورقها و پوسته ها

۱۴,۱ ورقها

ورق مسطح یک عضو سازه ای است که کاربرد زیادی دارد. طبقات ساختمانها، عرشه کشتیها، دریچه ها، و دیوارها، مثالهایی از صفحات تخت اند. به طور کلی، ورق یک مساحت مسطح بزرگ است که ضخامت آن بسیار کوچکتر از سایر ابعاد ورق است. ورقها می توانند در معرض گستره وسیعی از بارگذاریها و شرایط مرزی قرار گیرند. مثالهای متداول از شرایط مرزی شامل تکیه گاه ساده، تکیه گاه گیردار، و آزاد می باشد. ورقهای تختی که مساحتهای بزرگی را می پوشانند نوعا با تیرهای با فاصله برابر به نام استرینگر تقویت می شوند. به دلیل بارگذاریها و شرایط مرزی متغیری که بر روی سطح ورقها اعمال می شود، تحلیل ورقها پیچیده تر از میله های ایده آل، تیرها و عضوهای سازه ای جدار نازک است که پیشتر در این کتاب مورد بررسی قرار گرفته اند. ملاحظه دیگر در تحلیل ورقها، محدوده ای است که تغییر شکلها را بتوان کوچک درنظر گرفت. این فرض بر این مبنا استوار است که تغییر شکلها در مقایسه با ضخامت ورق کوچک باشد (خود ضخامت ورق نیز در مقایسه با دیگر ابعاد ورق کوچک است).

راه حلهای تحلیلی و تحلیلی تقریبی برای گسترده محدودی از هندسه ورقها و شرایط بارگذاری توسط تیموشنکو و وینوفسکی-کریگر (۱۹۵۹) مورد بررسی قرار گرفته است. برای تحلیل هندسه ها، بارگذاریها و شرایط مرزی پیچیده تر، روشهای المان محدود یا دیگر روشهای تقریبی به کار می رود (شیمز و دیم ۱۹۸۵).

یک ورق مستطیلی با گشتاورهای M و نیروهای برشی Q (که به صورت گشتاور و نیرو بر واحد طول تعریف می شوند) در شکل ۱۴,۱ نشان داده شده اند. تحلیلهای مسایل ورقها را می توان برحسب این نیروها و گشتاورها و نیز جابجاییهای صفحه میانی ورق w(x,y) فرمول بندی کرد. بارگذاری q(x,y) که عمود بر ورق بوده و بر روی سطح ورق متغیر است را در نظر می گیریم. گشتاور M_{xy} گشتاور پیچشی مربوط به تنشهای برشی در صفحه ورق است. نیروهای برشی Q_x و Q_y مربوط به تنشهای برشی عرضی τ_{xz} و τ_{yz} است.



شکل ۱۴,۱ ورق مستطیل شکل و نیروها و گشتاورها. (الف) گشتاورهای خمشی ورق بر واحد طول. (ب) هندسه ورق و نیروهای برشی بر واحد طول.

گشتاورها و نیروهای برشی بر واحد طول در شکل ۱۴,۱ برحسب تنشها به صورت زیر تعریف می شوند:

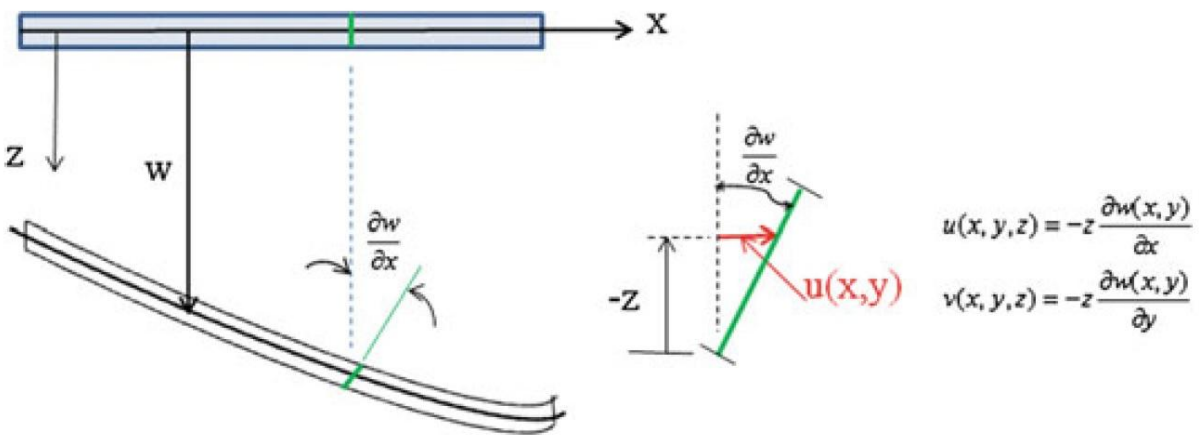
$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \qquad (۱۴,۱)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz$$



شکل ۱۴,۲ تغییر شکلهای ورق مربوط به خمش

جابجایی عمودی صفحه میانی ورق w(x,y) مربوط به خمش در شکل ۱۴,۲ برای انحنای ورق در صفحه x-z نشان داده شده است. شکب مشابهی را می توان برای صفحه y-z تجسم کرد. در اینجا فرض می شود که همانند مساله خمش تیر، خطوط عمود بر صفحه میانی تغییر شکل نیافته، پس از تغییر شکل صفحه میانی همچنان بر آن عمود بوده و تغییر طول نمی دهند. همانگونه که در این شکل نشان داده، تغییر شکلهای u(x,y,z) و v(x,y,z) برای مساله خمش با این روابط به دست می آیند:

$$u(x,y,z) = -z\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}$$
$$v(x,y,z) = -z\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \qquad (۱۴,۲)$$

با استفاده از روابط تغییر شکل فوق (۱۴,۲) و روابط کرنش-جابجایی (۳,۲ و ۳,۳) و معادلات مشخصه (۴,۱ و ۴,۲) برای ماده الاستیک خطی همگن، معادلات بنیادین برای توصیف مساله خمش ورق را می توان به صورت زیر خلاصه نویسی کرد:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (۱۴,۳)$$
$$M_{xy} = -(1-v)D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$$

که در آن D سفتی خمشی است که برحسب پارامترهای معلوم ورق به صورت زیر تعریف می شود:

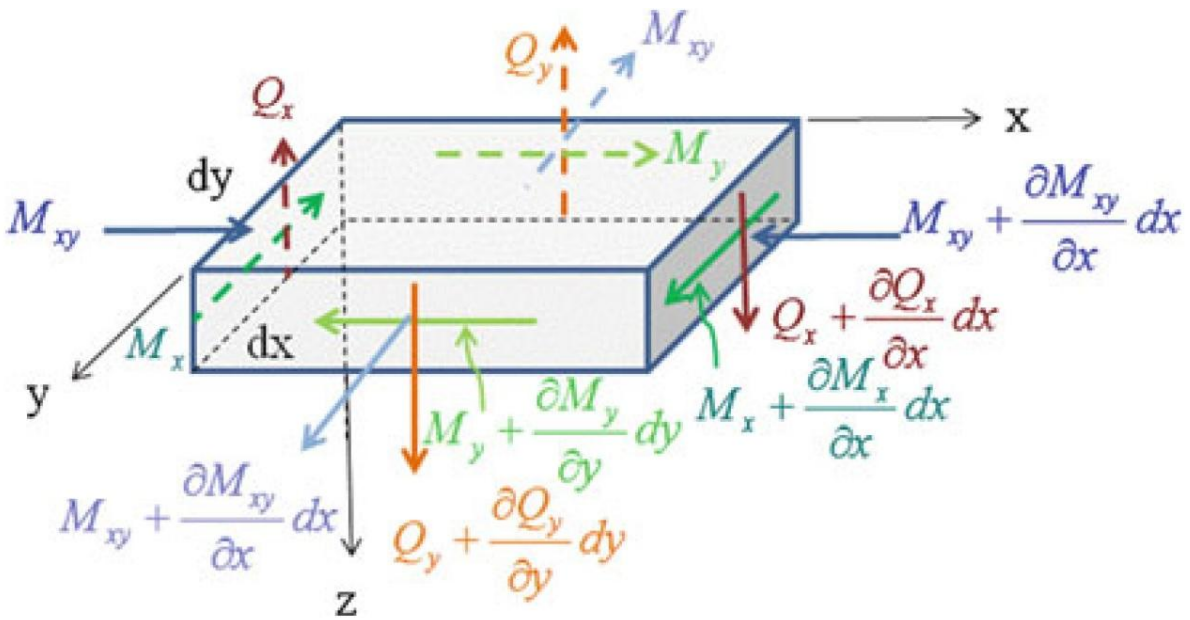
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \qquad (۱۴,۴)$$

تعادل یک المان بسیار کوچک همانگونه که در شکل ۱۴,۳ نشان داده شده است به نتایج زیر منتج می شود:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x,y) = 0 \qquad (۱۴,۵)$$

و

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x,y) = 0 \qquad (۱۴,۶)$$



شکل ۱۴٫۳ گشتاورها و نیروهای برشی وارد بر یک المان بسیار کوچک

رابطه (۱۴٫۶) را می توان با استفاده از روابط (۱۴٫۳) و (۱۴٫۷) برحسب جابجایی عمودی w(x,y) نوشت. عملگر ∇^4 به نام عملگر بای هارمونیک شناخته می شود (پیوست را ببینید):

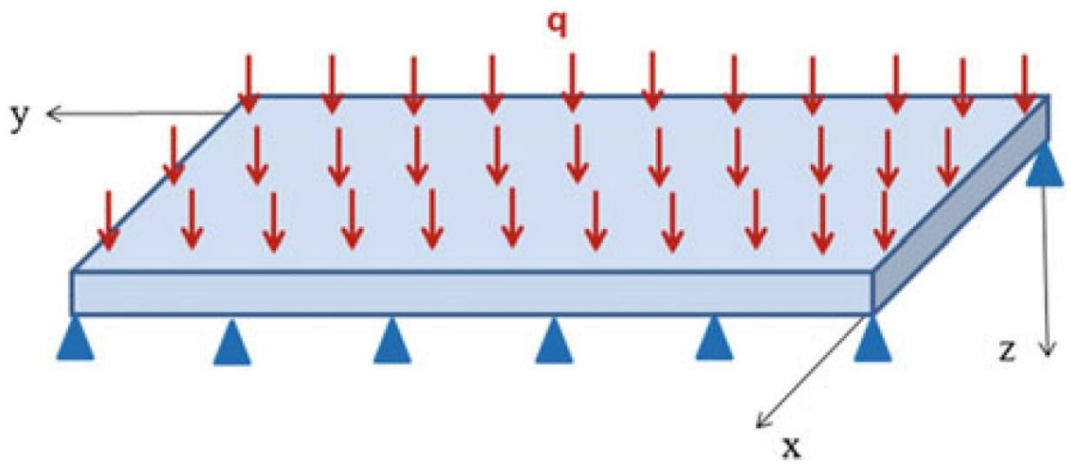
$$\nabla^4 w(x,y) \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D} \qquad (۱۴٫۷)$$

رابطه فوق، معادله تئوری کلاسیک ورق است. این معادله نخستین بار به شکلهای ناقص گوناگون توسط سوفی ژرماین در دوره سالهای ۱۸۱۱ تا ۱۸۱۶ ارایه شد. ناویر در یک ارایه علمی در آکادمی فرانسه در ۱۸۲۳ شکل کامل آن را ارایه کرد. در نهایت، کرشهف مقاله ای منتشر کرد (۱۸۵۰) که در آن به روشنی فرضیات مورد استفاده در استخراج معادلات برای تغییر شکلهای کوچک در ورقها و تیرها را بیان کرد. مشخصات شرایط مرزی و تغییرات بار q(x,y) باید مشخص باشد تا بتوان این معادله را حل کرد. راه حلهای تحلیلی تنها برای تعداد محدودی از حالتها وجود دارد.

۱۴٫۲ ورق در خمش استوانه ای

یک دسته از مسایل ورق که برای آن راه حل تحلیلی وجود دارد ورق در خمش استوانه ای است. ورق مطابق شکل ۱۴٫۴ را در نظر بگیرید که در راستای y طول زیادی دارد، در لبه های خود تکیه گاه ساده دارد و بر روی سطح ورق بار گسترده q(x,y) اعمال شده است. بنابراین مساله، یک بعدی در راستای x است؛ ورق به صورت استوانه ای در صفحه x-z تغییر شکل می یابد. شرایط مرزی این مساله عبارتند از:

$$\begin{aligned} w(0) &= w(a) = 0 \\ M(0) &= M(a) = 0 \end{aligned} \qquad (۱۴٫۸)$$



شکل ۱۴,۴ ورق طول بلند با بارگذاری یکنواخت

این چهار شرط مرزی روابط لازم برای تعیین چهار ثابت مجهول حاصل شده در انتگرال گیری معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی مرتبه چهارم (۱۴,۷) را فراهم می کند (مشتقهای جزیی نسبت به y برابر با صفر است). حل کلی برای جابجایی w(x) ورق در خمش استوانه ای برابر است با:

$$w(x) = \frac{q_\circ x^4}{24D} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4 \qquad (۱۴,۹)$$

اعمال چهار شرط مرزی منجر به نتایج زیر برای چهار ثابت می شود:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{q_\circ a}{2D} \\ C_2 &= 0 \\ C_3 &= \frac{q_\circ a^3}{24D} \\ C_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (۱۴,۱۰)$$

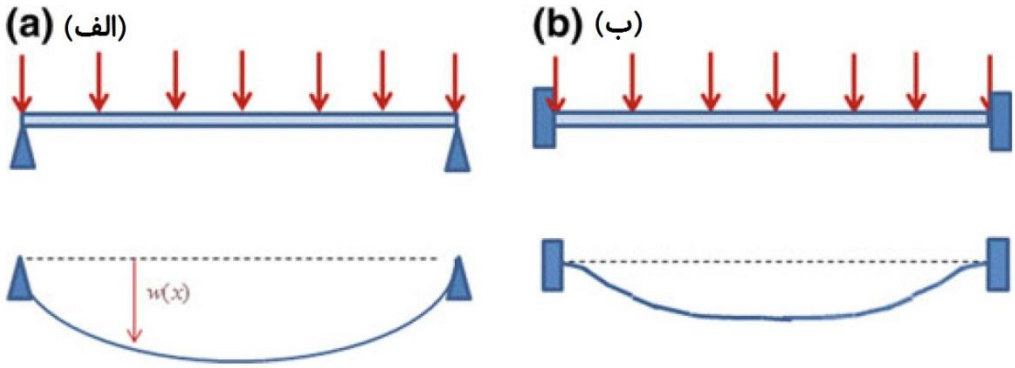
گفتنی است که اگر ورق در لبه های خود گیردار بود، مساله با شرایط مرزی زیر حل می شد:

$$\begin{aligned} w(0) &= w(a) = 0 \\ \frac{\partial w(0)}{\partial x} &= \frac{\partial w(a)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \qquad (۱۴,۱۱)$$

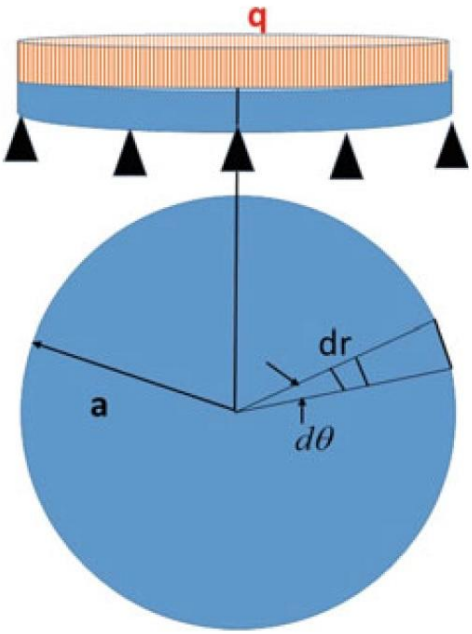
تصاویر تغییر شکل برای این دو حالت شرایط مرزی در شکل ۱۴,۵ نشان داده شده است.

۱۴,۳ ورق دایره ای تحت بارگذاری متقارن

یک ورق دایره ای که در معرض بارگذاری متقارن مانند بار گسترده q(r) قرار گرفته است را می توان به عنوان تابعی از مختصات شعاعی r تحلیل کرد. ورق دایره ای نازک تحت بار q(r) و تکیه گاه یکنواخت در لبه r=a را درنظر بگیرید (شکل ۱۴,۶).



شکل ۱۴٫۵ تغییر شکلها در خمش استوانه ای. (الف) ورق تکیه گاه ساده. (ب) ورق تکیه گاه گیردار.



شکل ۱۴٫۶ ورق دایره ای.

معادله دیفرانسیل برای این مساله عبارت است از (برای جزئیات بیشتر، تیموشنکو و وینوفسکی-کریگر (۱۹۵۹) را ببینید):

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\{r\frac{d}{dr}[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dw}{dr})]\} = \frac{q(r)}{D} \qquad (۱۴,۱۲)$$

برای بارگذاری یکنواخت q(r)=q با انتگرال گیری نتیجه زیر حاصل می شود:

$$w(r) = \frac{qr^4}{64D} + C_1\frac{r^2}{4} + C_2\log\frac{r}{a} + C_3 \qquad (۱۴,۱۳)$$

ثوابت انتگرال گیری C_1، C_2، و C_3 را می توان از شرایط مرزی به دست آورد.

۱۴٫۴ ورق دایره ای با لبه گیردار

شرایط مرزی برای این حالت عبارت است از:

$$\frac{dw}{dr} = 0 \quad at\ r = 0\ \&\ r = a$$
$$w = 0 \quad at\ r = a \tag{۱۴,۱۴}$$

با جایگذاری و حل معادلات، ثوابت مجهول به صورت زیر به دست می آیند:

$$C_1 = -\frac{qa^2}{8D}$$
$$C_2 = 0 \tag{۱۴,۱۵}$$
$$C_3 = \frac{qa^4}{64D}$$

و جواب نهایی معادله برابر است با:

$$w(r) = \frac{q}{64D}\left(a^2 - r^2\right)^2 \tag{۱۴,۱۶}$$

۱۴,۵ ورق دایره ای با لبه تکیه گاه ساده

شرایط مرزی برای این حالت برابر است با:

$$\frac{dw}{dr} = 0 \quad at\ r = 0$$
$$w = 0 \quad at\ r = a \tag{۱۴,۱۷}$$
$$M_r(r = a) = 0$$

و جواب نهایی معادله برابر است با:

$$w(r) = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D}\left[\left(\frac{5+v}{1+v}\right)\left(a^2 - r^2\right)\right] \tag{۱۴,۱۸}$$

۱۴,۶ پوسته ها

پوسته ها را می توان ورقهای خمیده ای تصور کرد که ضخامت آنها بسیار کوچکتر از دیگر ابعاد رویه می باشد. برای مثالهای سازه های پوسته می توان به پوسته تخم مرغ و بدنه قایقها اشاره کرد (شکل ۱۴,۷). یک مثال از سازه پوسته شگفت انگیز، سالن اوپرای سیدنی (شکل ۱۴,۸) است. این ساختمان در سال ۲۰۰۷ به عنوان میراث جهانی یونسکو شناخته شد. مباحث اصلی تئوری پوسته توسط تیموشنکو و وینوفسکی-کریگر (۱۹۵۹) ارایه شده است. همانند مساله ورقها، راه حلهای تحلیلی تنها برای تعداد بسیار محدودی از حالتهای ایده آل، شامل کره و استوانه جدار نازک که در

فصل ۱۳ مورد بررسی قرار گرفته اند، وجود دارد. نوعا از روش المان محدود و دیگر روشهای مکانیک محاسباتی تقریبی برای تحلیل سازه های پوسته پیچیده استفاده می شود.
به دلیل پیچیدگی سازه های پوسته ای، به غیر از تحلیلی که در فصل ۱۳ ارایه شده، موضوع دیگری در اینجا مورد بررسی قرار نمی گیرد. برای تحلیل پیشرفته پوسته ها، خواننده به کتاب لیبای و سیموندز (۱۹۹۸) ارجاع داده می شود.

پوسته تخم مرغ

بدنه قایق

شکل ۱۴,۷ سازه های پوسته

شکل ۱۴,۸ تالار اوپرای سیدنی

۱۴,۷ تمرینها

۱۴,۷,۱ نشان دهید که رابطه (۱۴,۷) صحیح است.

۱۴,۷,۲ نشان دهید که رابطه (۱۴,۱۰) ثوابت مجهول برای ورق تحت بار یکنواخت در خمش استوانه ای را می دهد.

۱۴,۷,۳ نشان دهید که رابطه (۱۴,۱۳) جواب معادله (۱۴,۱۲) است.

۱۴,۷,۴ بیشینه خیز عمودی ورق تحت بار یکنواخت در شکل ۱۴,۴ چقدر است؟

پیوست: پاسخها

۱۴,۷,۱ نشان دهید که رابطه (۱۴,۷) صحیح است.

$$\nabla^4 w(x,y) \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D}$$

پاسخ:

با جایگذاری رابطه (۱۴,۳):

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{xy} = -(1-\nu)D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$$

در رابطه (۱۴,۶):

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x,y) = 0$$

می دهد:

$$\frac{\partial^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)}{\partial y^2} = \frac{q(x,y)}{D}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1-\nu)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q(x,y)}{D}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D} \equiv \nabla^4 w$$

۱۴,۷,۲ نشان دهید که رابطه (۱۴,۱۰) ثوابت مجهول برای ورق تحت بار یکنواخت در خمش استوانه ای را می دهد.

$$C_1 = -\frac{q_\circ a}{2D}$$
$$C_2 = 0$$
$$C_3 = \frac{q_\circ a^3}{24D}$$
$$C_4 = 0$$

پاسخ:

با استفاده از رابطه (۱۴,۹) جواب کلی برابر است با:

$$w(x) = \frac{q_\circ x^4}{24D} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

از رابطه (۱۴,۸) شرایط مرزی برابر است با:

$$w(0) = w(a) = 0$$
$$M(0) = M(a) = 0$$

با جایگذاری، این نتایج حاصل می شود:

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow C_4 = 0$$
$$M_x(0) = 0 \quad \Rightarrow -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow C_2 = 0$$
$$M_x(a) = 0 \quad \Rightarrow \frac{(q_\circ a^2)}{2D} + C_1 a = 0 \quad \Rightarrow C_1 = -\frac{q_\circ a}{2D}$$
$$w(a) = 0 \quad \Rightarrow \frac{q_\circ a^4}{24D} + \left(-\frac{q_\circ a}{2D}\right)\frac{a^3}{6} + C_3 a = 0 \quad \Rightarrow C_3 = \frac{q_\circ a^3}{24D}$$

۱۴,۷,۳ نشان دهید که رابطه (۱۴,۱۳) جواب معادله (۱۴,۱۲) است.

با استفاده از رابطه (۱۴,۱۲):

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\{r\frac{d}{dr}[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dw}{dr})]\} = \frac{q(r)}{D}$$

و رابطه (۱۴,۱۳):

$$w(r) = \frac{qr^4}{64D} + C_1\frac{r^2}{4} + C_2 \log\frac{r}{a} + C_3$$

پاسخ:

با جایگذاری مقادیر معلوم ثوابت:

$$C_2 = C_4 = 0$$

$$C_1 = \frac{-q_\circ a}{2D}; \quad C_3 = \frac{q_\circ a^2}{24D}$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{q_\circ r^3}{16D} + \frac{C_1 r}{2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d\left(r\left(\frac{q_\circ r^3}{16D} + \frac{C_1 r}{2}\right)\right)}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d\left(\left(\frac{q_\circ r^4}{16D} + \frac{C_1 r^2}{2}\right)\right)}{dr} = \frac{1}{r}\left(\left(\frac{q_\circ r^3}{4D} + C_1 r\right)\right)$$

$$r\frac{d\left[\frac{1}{r}\left(\frac{q_\circ r^3}{4D} + C_1 r\right)\right]}{dr} = r\frac{d\left(\left(\frac{q_\circ r^2}{4D} + C_1\right)\right)}{dr} = \left(\frac{q_\circ r^2}{2D}\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{q_\circ r^2}{2D}\right)}{dr} = \frac{1}{r}\frac{q_\circ r}{D} = \frac{q_\circ}{D}$$

۱۴,۷,۴ بیشینه خیز عمودی ورق تحت بار یکنواخت در شکل ۱۴,۴ چقدر است؟

پاسخ:

با توجه به تقارن مساله، خیز بیشینه در مرکز x=a/2 رخ می دهد. معادله خیز با ثوابت معلوم عبارت است از:

$$w(x) = \frac{q_\circ x^4}{24D} - \frac{q_\circ a x^3}{12D} + \frac{q_\circ a^3}{24D}x$$

در x=a/2:

$$w\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{q_\circ\left(\frac{a}{2}\right)^4}{24D} - \frac{q_\circ a\left(\frac{a}{2}\right)^3}{12D} + \frac{q_\circ a^3}{24D}\frac{a}{2}$$

$$w\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{q_\circ a^4}{12D}\left(\frac{1}{32} - \frac{4}{32} + \frac{8}{32}\right) = \frac{q_\circ a^4}{12D}\left(\frac{5}{32}\right) = \frac{5q_\circ a^4}{384D}$$

ملاحظه می شود که برای q_0 منفی، خیز منفی است.

مراجع

Kirchhoff, G. (1850). Journal of Mathematics (Crelle), 40.

Libai, A., & Simmonds, J. G. (1998). The nonlinear theory of elastic shells. Cambridge: Cambridge University Press.

Navier, C.-L. (1823). Bull. Soc. Philomath, Paris, p. 92 (see Timoshenko, History of strength of materials, p. 121, 1953).

Shames, I. H., & Dym, C. L. (1985). Energy and finite element methods in structural mechanics. Hemisphere Publishing.

Timoshenko, S. P., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). Theory of plates and shells. McGraw-Hill.

فصل ۱۵
مکانیک محاسباتی

چندین روش تقریبی برای حل مسایل در مکانیک جامدات وجود دارد؛ برخی از این روشها عبارتند از حل تحلیلی تقریبی، واریاسیون، تفاضل محدود، و المان محدود. همه این روشها را می توان تحت عنوان کلی «مکانیک محاسباتی» دسته بندی کرد. روش المان محدود متداولترین و قویترین این روشها است که در ادامه معرفی خواهد شد.

۱۵,۱ روشهای المان محدود

تحلیل آرایشهای پیچیده سازه ای با استفاده از المانهای محدود امکان پذیر است. ایده بنیادین این روش آن است که سازه با یک سری از آرایشهای المانهای کوچک تقریب زده شود به گونه ای که برخی از ویژگیها مانند میدان جابجایی، تغییرات از پیش تعریف شده ای داشته باشند. مثال ساده ای از آن، نمایش سازه با یک سری از المانهای مثلثی است که بر روی آنها فرض می شود که جابجاییها به صورت خطی تغییر می کند. تغییرات خطی جابجاییها سبب می شود که کرنشها بر روی المانها ثابت باشند. برای مواد همگن الاستیک خطی، تنشها نیز بر روی المانها ثابت است. همچنان که تعداد المانها افزایش می یابد، تقریب تنش و کرنش واقعی بر روی سازه دقیقتر می شود.

توسعه روشهای المان محدود از کارهای پژوهشی کورانت (۱۹۴۳)، ترنز و همکاران (۱۹۵۶)، کلاف (۱۹۶۰) و آرگریس و کلسی (۱۹۶۰) آغاز شد. همه این کاربردهای اولیه مسایلی در مکانیک جامدات بودند. کلاف (۱۹۶۰) ظاهرا نخستین کسی بود که از عبارت «المان محدود» استفاده کرد. این زمینه از آن زمان به صورت نمایی رشد کرد و اکنون روشی مطلوب برای تحلیل اغلب مسایل سازه ای و نیز مسایلی در دیگر زمینه ها مانند مکانیک سیالات، انتقال حرارت، و بیومکانیک است. این روش برای مسایل یک بعدی، دو بعدی، و سه بعدی خطی و غیرخطی و نیز تحلیلهای استاتیک و دینامیک می تواند به کار رود. ثابت شده که این روش به لحاظ محاسباتی کارآمد و قدرتمند است و می تواند در گستره وسیعی از مسایل به کار رود.

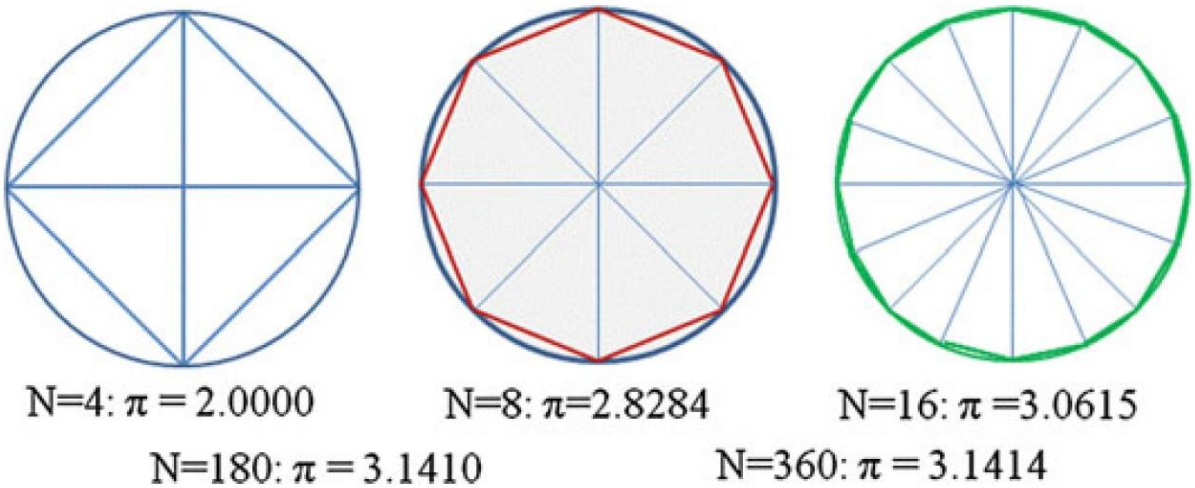
تردیدی نیست که وجود کامپیوترهای قدرتمند سبب رشد کاربرد روشهای المان محدود شده است. برای آشنایی بیشتر با این روش، به کتابهای هوبنر (۱۹۷۵) یا رِدی (۱۹۸۴) مراجعه کنید.

۱۵,۲ مقدار عدد پی

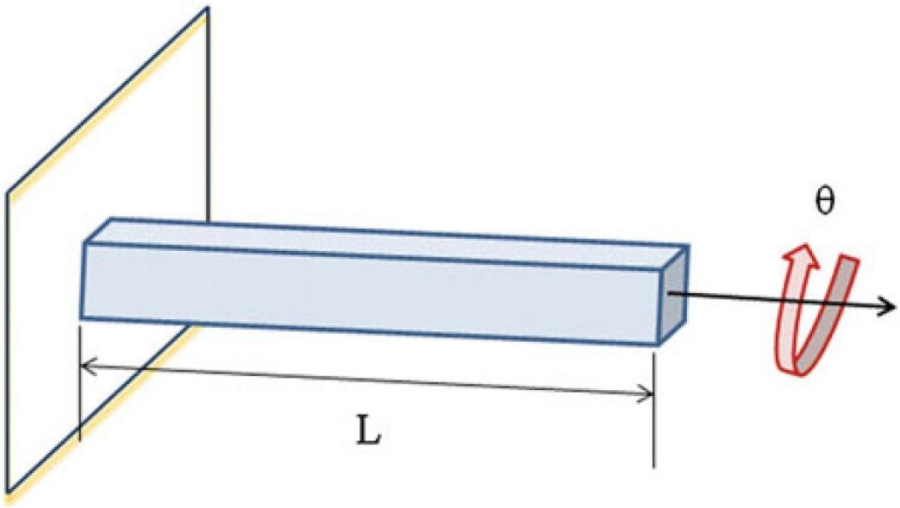
یکی از ساده ترین مثالهای کاربرد المان محدود، تعیین مقدار عدد پی است با دانستن این موضوع که مساحت دایره A متناسب با مربع شعاع R می باشد. اگرچه این مساله، کاربردی در مکانیک جامدات ندارد، اما ایده اصلی کاربرد المان

محدود را نشان می دهد. شکل ۱۵,۱ تعداد (N) در حال افزایشی از المانهای مثلثی را برای تقریب مساحت دایره نشان می دهد، که N از ۴ تا ۱۶ افزایش می یابد. همچنان که تعداد المانها افزایش می یابد، خطای تقریب مساحت دایره کاهش می یابد و از اینرو مقدار تقریبی عدد پی دقیقتر می شود. مقادیر تقریبی دیگر نیز در شکل برای N=180 و N=360 نشان داده شده است. برای N=360، مقدار تقریبی عدد پی برابر با 3.1414 است. از این شکل روشن است که می توان از تقارن برای کاهش تعداد المانهای مورد نیاز برای محاسبه بهره گرفت. تقارن تا حد امکان در تحلیل سازه های مهندسی برای کاهش منابع محاسباتی مورد نیاز استفاده می شود.

(۱۵,۱)



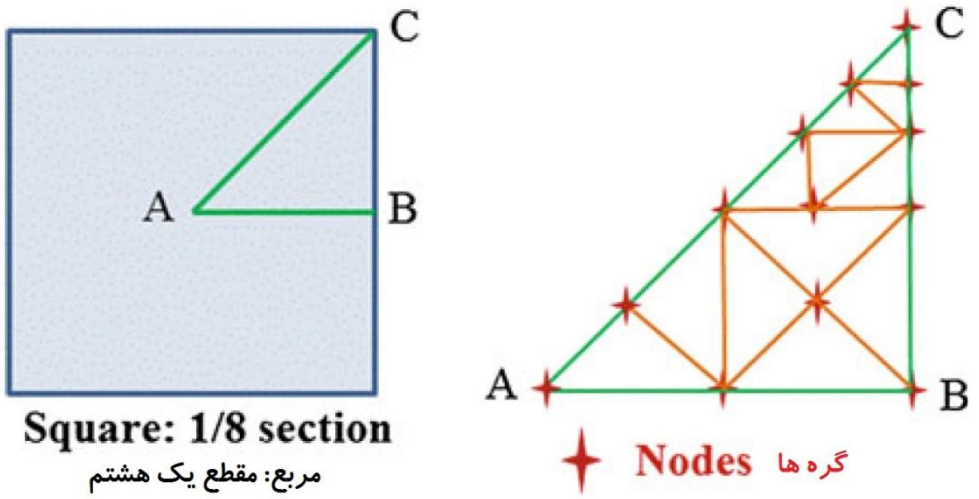
شکل ۱۵,۱ دایره تقریب زده شده با المانهای محدود مثلثی



شکل ۱۵,۲ میله مربعی در پیچش

۱۵,۳ پیچش میله مربعی با المان محدود

حل دقیق پیچش میله های غیر دایره ای تنها برای تعداد محدودی از شکلهای سطح مقطع وجود دارد (تیموشنکو و گودیر ۱۹۳۴ فصل ۱۰ را ببینید). هنگامی که سطح مقطع غیردایره ای است، عموما از روشهای تقریبی استفاده می شود. کاربرد المان محدود برای مساله پیچش میله های غیردایره ای، سادگی و توانمندی این روش را نشان می دهد.
میله ای با سطح مقطع مطابق شکل ۱۵,۲ را درنظر بگیرید. از آنجا که سطح مقطع در طول میله ثابت است، تنها لازم است توزیع تنش بر روی یک سطح مقطع بررسی شود. شرایط مرزی مستلزم آن است که تنش برشی در گوشه ها صفر باشد. از تغییر تدریجی اندازه المانها استفاده می شود تا این تغییرات تنشها در نزدیکی گوشه ها محاسبه شود (شکل ۱۵,۳).



شکل ۱۵,۳ نمایش المان محدود یک سطح مقطع مربع

پراندتل (۱۹۰۳) نشان داد که تنشهای غیرصفر برشی در یک میله توپر غیر دایره ای که در معرض پیچش قرار گرفته را می توان برحسب عبارات یک تابع تنش مجهول $\varphi(x,y)$ نمایش داد به گونه ای که:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{and} \quad \tau_{zy} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{۱۵,۲}$$

که در آن تابع $\varphi(x,y)$ جواب معادله زیر است:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0 \tag{۱۵,۳}$$

که در آن در مرزها، $\varphi = 0$ است. در رابطه فوق، G مدول برشی ماده و θ زاویه پیچش بر واحد طول میله است.
برای فرمول بندی المان محدود، سطح مقطع با یک سیستمی از المانهای محدود مثلثی مطابق با شکل ۱۵,۳ نمایش داده می شود، که در آن با استفاده از تقارن، تحلیل به یک هشتم از سطح مقطع کاهش می یابد. روش حل المان محدود مقادیر گره ای مجهول φ_i به هر گره در نمایش المان محدود اختصاص می دهد (شکل را ببینید). این روش سپس دستگاهی از معادلات جبری همزمان را برای تعیین مقادیر مجهول φ_i تشکیل می دهد. در حالت کلی دو روش برای تعیین دستگاه معادلات همزمان وجود دارد. یک روش به نام مستقیم شناخته شده و دیگری روش تغییراتی نامیده می شود. روش تغییراتی متداولتر است. این روش بر کمینه کردن یک فانکشنال مانند پتانسیل یا انرژی مکمل استوار است (فانک (۱۹۶۵) بخشهای ۱۰,۷ و ۱۰,۹ را ببینید) که بر روی ناحیه مورد نظر تعریف شده است. مشتقات جزیی این

فانکشنال نسبت به مقادیر مجهول گره ای، برابر با صفر قرار داده شده تا دستگاهی از معادلات همزمان برای مقادیر گره ای تشکیل شود. تعداد معادلات با تعداد مجهولات برابر است. با مقادیر گره ای تعیین شده و تغییرات خطی مشخص شده φ بر روی المانها، تنشهای برشی بر روی هر المان ثابت است. به این ترتیب، مساله حل می شود.

۱۵,۴ تمرینها

۱۵,۴,۱ نشان دهید که مقدار به دست آمده برای π در شکل ۱۵,۱ برای ۱۸۰ المان مثلثی صحیح است.

۱۵,۴,۲ نشان دهید که مقدار به دست آمده برای π در شکل ۱۵,۱ برای ۳۶۰ المان مثلثی صحیح است.

۱۵,۴,۳ مقدار π را با استفاده از مربع محیط بر دایره برآورد کنید.

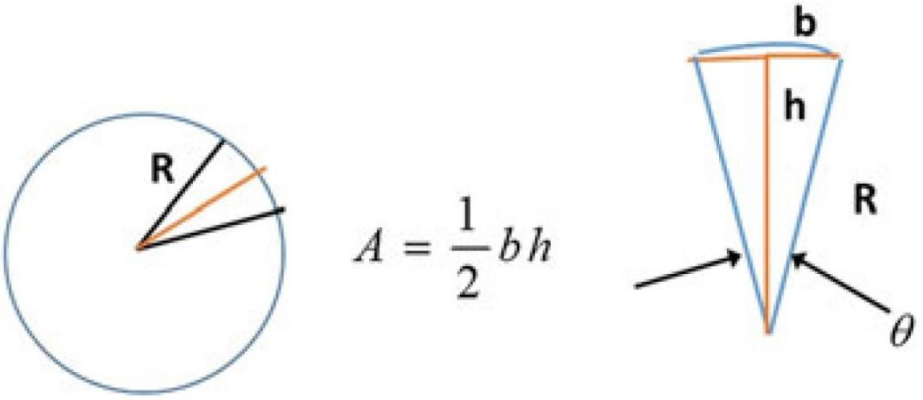
۱۵,۴,۴ مقدار π را با استفاده از دایره محیط بر مربع برآورد کنید.

۱۵,۴,۵ نشان دهید که اگر فرض شود که تابع تنش بر روی هر المان مثلثی در نمایش المان محدود مساله پیچش به صورت خطی تغییر کند، این فرض معادل آن است که فرض شود تنشهای برشی بر روی هر المان ثابت است.

پیوست: پاسخها

۱۵,۴,۱ نشان دهید که مقدار به دست آمده برای π در شکل ۱۵,۱ برای ۱۸۰ المان مثلثی صحیح است.

پاسخ:



$$h = R\,cos(\frac{\theta}{2}) \quad b = 2R\,sin(\frac{\theta}{2})$$
$$A = R^2\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right) cos(\frac{\theta}{2})$$

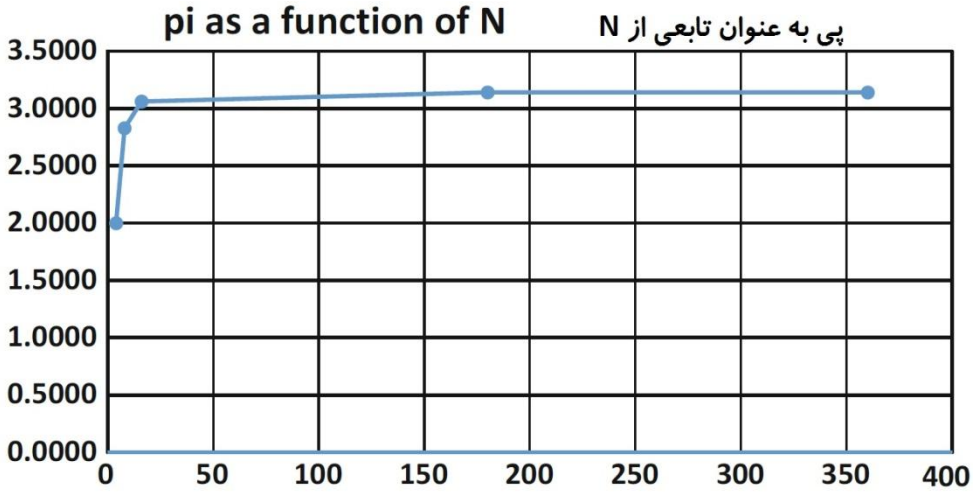
جدول بعدی را ببینید.

۱۵,۴,۲ نشان دهید که مقدار به دست آمده برای π در شکل ۱۵,۱ برای ۳۶۰ المان مثلثی صحیح است.

پاسخ:

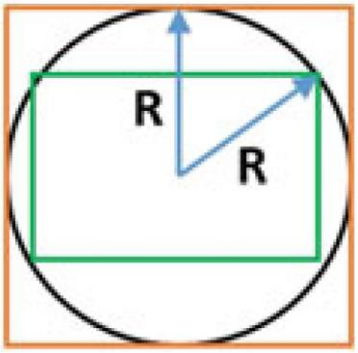
نتایج ارایه شده در زیر برگرفته از یک فایل EXCEL است.

N	theta	rads	rads/2	sin(t/2)	cos(t/2)	1/2(s t/2 c t/2)	pi
4.00	90.00	1.570796	0.785398	0.707107	0.707107	0.500000	2.000000
8.00	45.00	0.785398	0.392699	0.382683	0.923880	0.353553	2.828427
16.00	22.50	0.392699	0.196350	0.195090	0.980785	0.191342	3.061467
180.00	2.00	0.034907	0.017453	0.017452	0.999848	0.017450	3.140955
360.00	1.00	0.017453	0.008727	0.008727	0.999962	0.008726	3.141433



۱۵,۴,۳ مقدار π را با استفاده از مربع محیط بر دایره برآورد کنید.

پاسخ:



$$A_{red} = (2R)(2R) = 4R^2 \quad \Rightarrow \pi = 4$$

۱۵,۴,۴ مقدار π را با استفاده از دایره محیط بر مربع برآورد کنید.

پاسخ:

$$A_{green} = [2R\ \sin(45)]^2 = 4R^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2R^2 \quad \pi = 2$$

۱۵,۴,۵ نشان دهید که اگر فرض شود که تابع تنش بر روی هر المان مثلثی در نمایش المان محدود مساله پیچش به صورت خطی تغییر کند، این فرض معادل آن است که فرض شود تنشهای برشی بر روی هر المان ثابت است.

پاسخ:

از رابطه (۱۵,۲):

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ and } \tau_{zy} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

برای تغییرات خطی φ:

$$\phi = Ax + By$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = A \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = B$$

بنابراین، تنشهای برشی بر روی هر المان محدود، ثابت است.

مراجع:

Argyris, J. H., & Kelsey, S. (1960). Energy theorems and structural analysis. Butterworth Scientific.

Clough, R. W. (1960). The finite element method in plane stress analysis. In Proceedings of 2nd conference on Journal of the Structural Division. Electronic Computation.

Courant, R. (1943). Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. Bulletin of the American Mathematical Society, 49, 1–43.

Fung, Y. C. (1965). Foundations of solid mechanics. Upper Saddle River: Prentice-Hall.

Huebner, K. H. (1975). The finite element method for engineers. New York: Wiley.

Prandtl, L. (1903). Zur torsion von prismatischen stäben. Phys Zeitschr, 4, 758–770.

Reddy, J. N. (1984). An introduction to the finite element method. New York: McGraw-Hill.

Timoshenko, S. P., & Goodier, J. N. (1934). Theory of elasticity. New York: McGraw-Hill.

Turner, M., Clough, R., Martin, H., & Topp, L. (1956). Stiffness and deflection analysis of complex structures. Journal of Aerosol Science, 23, 805–823.

فصل ۱۶
مواد کامپوزیت الیافدار

کاربرد مواد کامپوزیت الیافدار برای کاربردهای سازه ای در اواخر قرن بیستم کاملا فراگیر شد. اطمینان و توانمندی طراحی و ساخت با این مواد را می توان با کاربرد قرن بیست و یکم کامپوزیت الیاف کربن به عنوان ماده سازه ای تحمل کننده بار در هواپیمای تجاری بوئینگ ۷۸۷ مثال زد (شکل ۱۶,۱). کامپوزیتهای الیاف شیشه نیز کاربرد گسترده ای دارند. مزایای کامپوزیتهای الیاف دار عبارتند از سفتی بالا، استحکام بالا، وزن سبک، مقاوم در برابر خوردگی، ضریب انبساط گرمایی نزدیک به صفر، دوام خستگی بالا، مقاومت به ضربه بالا، هزینه های تولید پایین به دلیل کاهش تعداد قطعات و کاهش هزینه های نگهداری.

در جدول ۱۶,۱ (برگرفته از هراکویچ ۱۹۹۸) خواص مواد برای گستره ای از فلزات، الیاف تک جهته و مواد زمینه ارایه شده است. ظرفیت کاهش وزن در کامپوزیتها با نسبتهای سفتی بر واحد چگالی و استحکام بر واحد چگالی در مقایسه با آلومینیوم نشان داده شده است. خواص واقعی کامپوزیتها به اندازه خواص الیاف بالا نیست زیرا کامپوزیت آمیزه ای از الیاف و زمینه است و لایه های خارج از محور بسیاری از این خواص را کاهش می دهد.

خواص مواد کامپوزیت الیاف دار با جهت تغییر می کند. این موضوع سبب می شود که معادلات مشخصه و روشهای تحلیلی، پیچیده تر شود. موادی که خواص آنها با جهت تغییر می کند مواد ناهمسانگرد نامیده می شوند. در حالی که تحلیل و طراحی کامپوزیتها پیچیدگی بیشتری نسبت به مواد همسانگرد دارد، با وجود کامپیوترهای مدرن، حل اینگونه مسایل دشوار نیست.

مرور تاریخی بر پیشرفتهای مکانیک کامپوزیتها توسط هراکویچ (۲۰۱۲) ارایه شده است.

شکل ۱۶,۱ بوئینگ ۷۸۷

جدول ۱۶,۱ خواص مواد مهندسی، الیاف و زمینه ها

ماده	چگالی ρ	مدول E_L	نسبت پواسون ν_L	استحکام	سفتی بر واحد چگالی نسبی $(E/\rho)/(E/\rho)_{Al}$	استحکام بر واحد چگالی نسبی $(\sigma_u/\rho)/(\sigma_u/\rho)_{Al}$	ضریب انبساط حرارتی α_L
	$\frac{}{c}$	GPa (Mpsi)		MPa (kpsi)			٥
فلزات							
فولاد	7.8 (0.284)	200 (29)	0.32	1724 (250)	1.0	1.2	12.8 (7.1)
آلومینیوم	2.7 (0.097)	69 (10)	0.33	483 (70)	1.0	1.0	23.4 (13.0)
تیتانیوم	4.5 (0.163)	91 (13.2)	0.36	758 (110)	0.95	1.2	8.8 (4.9)
الیاف (خواص محوری)							
AS4	1.80 (0.065)	235 (34)	0.2	3599 (522)	5.1	11.1	-0.8 (-0.44)
T300	1.76 (0.064)	231 (33)	0.2	3654 (530)	5.1	11.5	-0.5 (-0.3)
P100S	2.15 (0.078)	724 (105)	0.2	2199 (319)	13.2	5.5	-1.4 (-0.78)

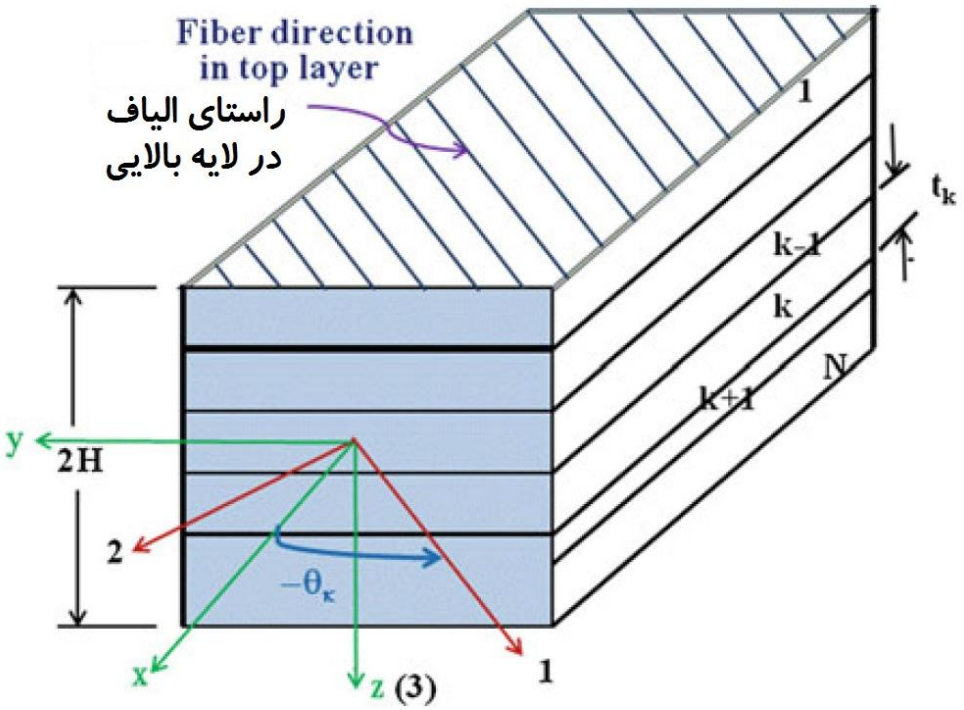
ماده	چگالی ρ	مدول E_L	نسبت پواسون ν_L	استحکام	سفتی بر واحد چگالی نسبی $(E/\rho)/(E/\rho)_{Al}$	استحکام بر واحد چگالی نسبی $(\sigma_u/\rho)/(\sigma_u/\rho)_{Al}$	ضریب انبساط حرارتی α_L
IM8	1.8 (0.065)	310 (45)	0.2	5171 (750)	6.7	16.1	-
برون	2.6 (0.094)	385 (55.8)	0.21	3799 (551)	5.8	8.3	8.3 (4.6)
کولار 49	1.44 (0.052)	124 (18)	0.34	3620 (525)	3.6	13.9	-2.0 (-1.1)
SCS-6	3.3 (0.119)	400 (58.0)	0.25	3496 (507)	5.1	6.1	5.0 (2.77)
آلومین	3.95 (0.143)	379 (55)	0.25	1585 (230)	3.7	1.9	7.5 (4.2)
شیشه S-2	2.46 (0.090)	86.8 (12.6)	0.23	4585 (665)	1.4	10.4	1.6 (0.9)
شیشه E	2.58 (0.093)	69 (10.0)	0.22	3450 (550)	1.05	7.5	5.4 (3.0)
مواد زمینه							
اپوکسی	1.38 (0.050)	4.6 (0.67)	0.36	58.6 (8.5)	0.08	0.4	63 (35)
پلی ایمید	1.46 (0.053)	3.5 (0.5)	0.35	103 (15)	0.03	0.4	36 (20)
مس	8.9 (0.32)	117 (17)	0.33	400 (58)	0.5	0.3	17 (9.4)
کاربید سیلیسیوم	3.2 (0.116)	400 (58)	0.25	310 (45)	4.9	0.5	4.8 (2.67)

۱۶,۱ کامپوزیتهای لایه ای

روی هم قرار گرفتن لایه های مواد کامپوزیتی الیافدار (شکل ۱۶,۲)، که می تواند به گونه ای باشد که محدوده وسیعی از خواص مهندسی مانند سفتی در صفحه، سفتی خمشی، استحکام و ضرایب انبساط حرارتی فراهم کند، را کامپوزیتهای لایه ای می نامند.

هر کدام از لایه ها حاوی الیاف با مدول و استحکام بالا بوده که درون یک ماده زمینه پلیمری یا سرامیکی قرار گرفته است. الیافی که در حال حاضر مورد استفاده قرار می گیرند عبارتند از کربن، شیشه، آرامید، برون، و کاربید سیلیسیوم (جدول ۱۶,۱ را ببینید). ممکن است از لایه های مواد گوناگون استفاده شود که کامپوزیتهای لایه ای هیبریدی ایجاد می شود. هر یک از لایه ها عموما ارتوتروپیک (خواص اصلی در راستاهای متعامد) یا همسانگرد عرضی (خواص همسانگردی در صفحه عرضی لایه) می باشند. مواد کامپوزیت لایه ای ممکن است رفتار ناهمسانگرد (یعنی خواص

اصلی متغیر با راستا)، ارتوتروپیک، یا شبه همسانگرد از خود نشان دهند. مواد کامپوزیت لایه ای شبه همسانگرد، رفتار درون صفحه ای همسانگرد (یعنی مستقل از راستا) داشته، ولی رفتار بیرون از صفحه ای (خمشی) همسانگرد نشان نمی دهند. بسته به توالی روی هم قرار گرفتن هر یک از لایه ها، کامپوزیت لایه ای ممکن است ترکیبی از رفتارهای درون صفحه ای و بیرون از صفحه ای نشان دهد. مثالی از ترکیب خمش-کشش، وجود انحنا ناشی از بارگذاری درون صفحه ای است. به طور مشابه، ممکن است در اثر بارگذاری خمش خالص بر روی یک کامپوزیت لایه ای نامتقارن، کرنشهای درون صفحه ای به وجود آید.



شکل ۱۶,۲ کامپوزیت لایه ای

۱۶,۲ تنش صفحه ای مواد ارتوتروپیک

یک لایه از کامپوزیت الیافدار تک جهته را می توان به عنوان یک ماده همگن ارتوتروپیک با خواص موثر در راستاهای ۱، ۲، و ۳ درنظر گرفت. برای تنش صفحه ای در راستاهای ۱، ۲، و ۳، و با استفاده از نمادهای ساده شده کامپوزیتها، معادلات مشخصه را می توان به این صورت نوشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21}\frac{\sigma_2}{E_2} \\ \varepsilon_2 &= -\nu_{12}\frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2} \\ \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \end{aligned} \tag{۱۶,۱}$$

این معادله را می توان به شکل ماتریسی به صورت زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \qquad (۱۶,۲)$$

در رابطه (۱۶,۲) E_1 مدول در راستای ۱ (الیاف) و E_2 مدول در راستای ۲ (عرضی)، G_{12} مدول برشی در صفحه ۱-۲، ν_{12} نسبت پواسون برای بارگذاری در راستای ۱، و ν_{21} نسبت پواسون برای بارگذاری در راستای ۲ می باشد.
ماتریس ۳ در ۳ در رابطه (۱۶,۲) ماتریس سفتی [Q] برای لایه تک جهته است. آن را می توان به راستاهای دیگر تبدیل کرد که با $[\bar{Q}]$ نمایش داده می شود.

۱۶,۳ تئوری لایه ای کلاسیک

تئوری لایه ای، پاسخ یک کامپوزیت لایه ای که در معرض بارهای درون صفحه ای و خمشی قرار گرفته است را توصیف می کند. تحلیل زیر برگرفته از کتاب هراکویچ (۱۹۹۸) است. در کامپوزیت لایه ای در شکل ۱۶,۲ از دستگاه مختصات کلی x-y-z استفاده شده است که محور z بر صفحه لایه ها عمود بوده و جهت مثبت آن رو به پایین است. مبدا دستگاه مختصات در صفحه میانی لایه ها قرار گرفته است. این کامپوزیت دارای N لایه است که از بالا به پایین شماره گذاری شده اند. هر لایه یک راستای الیاف متمایز θ_k دارد. مختصات z در پایین لایه k ام با z_k مشخص می شود که بالای لایه دارای مختصات z_{k-1} است. به این ترتیب ضخامت t_k هر لایه برابر است با $t_k = z_k - z_{k-1}$. سطح بالایی کامپوزیت لایه ای با z_0 مشخص شده و ضخامت کل آن برابر با 2H است.
فرض می شود که هر لایه را می توان به عنوان یک ماده همگن با خواص موثر شناخته شده ای که می تواند همسانگرد، ارتوتروپیک یا همسانگرد عرضی باشد نشان داد و یک اتصال کامل و بی نقص بین لایه ها وجود دارد. همچنین فرض می شود که هر لایه در وضعیت تنش صفحه ای قرار دارد و کامپوزیت لایه ای مطابق با فرضیات کرشهف (۱۸۵۰) برای خمش و اتساع ورقهای نازک تغییر شکل می یابد. مطابق با این تئوری، صفحات عمود بر صفحه میانی پیش از خمش، پس از خمش نیز همچنان مسطح و عمود بر صفحه میانی تغییر شکل یافته خواهند بود، و خطوط عمود بر صفحه میانی تغییر طول نمی دهند.
پیش از پرداختن به جزئیات تحلیل تنش کامپوزیتهای لایه ای، باید توجه داشت که یک رویه متداولی برای نمادهای خلاصه شده برای اغلب کمیتهای مورد نظر وجود دارد. مشخصا، هنگامی که مقصود به خوبی مشخص است، از یک زیروند به جای دو زیروند استفاده می شود. برای مثال، تعریف می کنیم که $\sigma_{xx} \equiv \sigma_x$ و $\varepsilon_{xx} \equiv \varepsilon_x$. همچنین از نمایش ماتریسی یا تانسوری برای ساده سازی نگارش کمیتهای پیچیده بهره می گیریم. برای مثال:

$$\{\sigma\} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (۱۶,۳)$$

$$\{\varepsilon\} \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{۱۶,۴}$$

فرضیات کیرشهف مستلزم آن است که کرنشهای خارج از صفحه ε_z، γ_{zy} و γ_{zx} همگی برابر با صفر باشد. کرنشهای درون صفحه $\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$ در هر موقعیت z را می توان برحسب کرنشهای صفحه میانی $\{\varepsilon^o\}$ و انحناهای $\{\kappa\}$ به صورت زیر بیان کرد:

$$\{\varepsilon^\circ\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{Bmatrix} \tag{۱۶,۵}$$

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{۱۶,۶}$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^\circ\} + z\{\kappa\} \tag{۱۶,۷}$$

تنشهای $\{\sigma\}^k$، در هر موقعیت z در لایه k ام از این کرنشها و معادله مشخصه لایه تعیین می شود که برحسب عبارتهای ماتریس سفتی $\{\bar{Q}\}^k$ لایه k ام بیان می شود. معادله مشخصه حاصل را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\{\sigma\}^k = [\bar{Q}]^k(\{\varepsilon^\circ\} + z\{\kappa\}) \tag{۱۶,۸}$$

ماتریس سفتی $[\bar{Q}]$ تابعی از خواص مهندسی (مدولها، نسبتهای پواسون، و مدولهای برشی) لایه و راستای لایه است. (برای جزئیات بیشتر به هراکویچ (۱۹۹۸) مراجعه کنید.) ماتریس سفتی متقارن است و شکل کلی زیر را داراست:

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \tag{۱۶,۹}$$

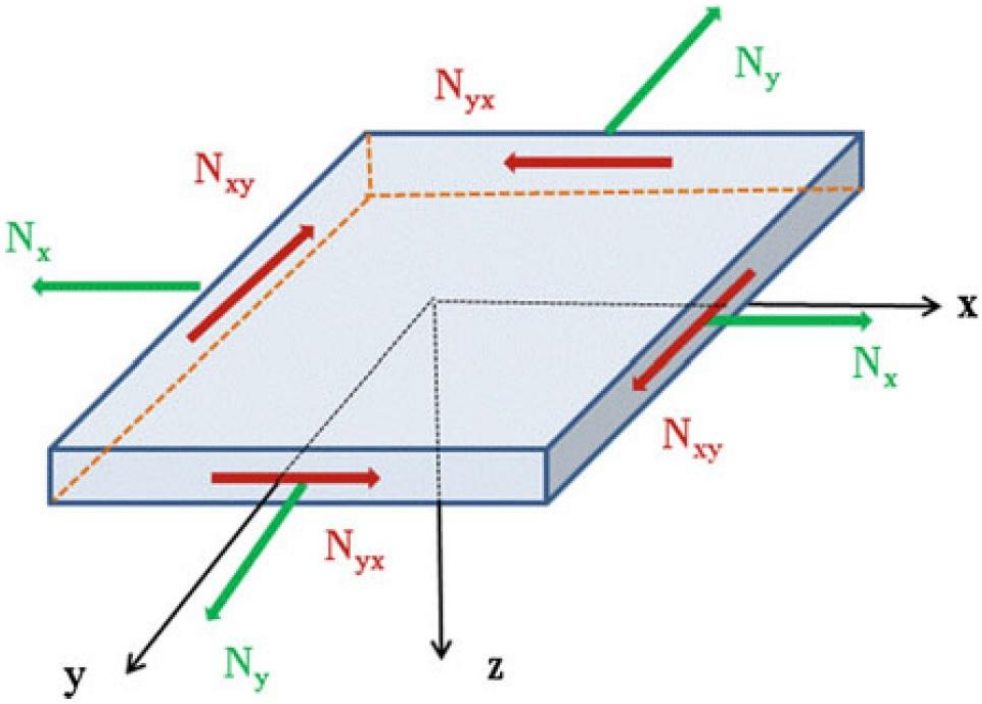
با صفر بودن انحنا ($\kappa = 0$)، معادله مشخصه تنش صفحه ای بسط داده شده برای لایه k ام شکل زیر را داراست:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{Bmatrix} \tag{۱۶,۱۰}$$

ملاحظه می شود که نماد زیروند 16 و 26 (در مقابل با 13 و 23) در کامپوزیتهای لایه ای برای شناسایی عبارتهای مرتبط با برش از ماتریس کلی ۶ در ۶ به کار می رود که برای یک ماده کاملا ناهمسانگرد مورد نیاز می باشد.

نیروهای صفحه ای بر واحد طول $\{N\}$ (شکل ۱۶,۳) به صورت انتگرالهای درون ضخامت تنشهای صفحه ای در کامپوزیت لایه ای تعریف می شوند.

$$\{N\} = \int_{-H}^{H} \{\sigma\} dz \qquad (۱۶,۱۱)$$



شکل ۱۶,۳ نیروهای درون صفحه ای

با ترکیب (۱۶,۸) با (۱۶,۹) و انتگرال گیری، شکل کلی رابطه برای نیروهای درون صفحه ای برحسب کرنشهای صفحه میانی، انحناها، و پارامترهای کامپوزیت لایه ای $[A]$ $[B]$ به صورت زیر تعریف می شود:

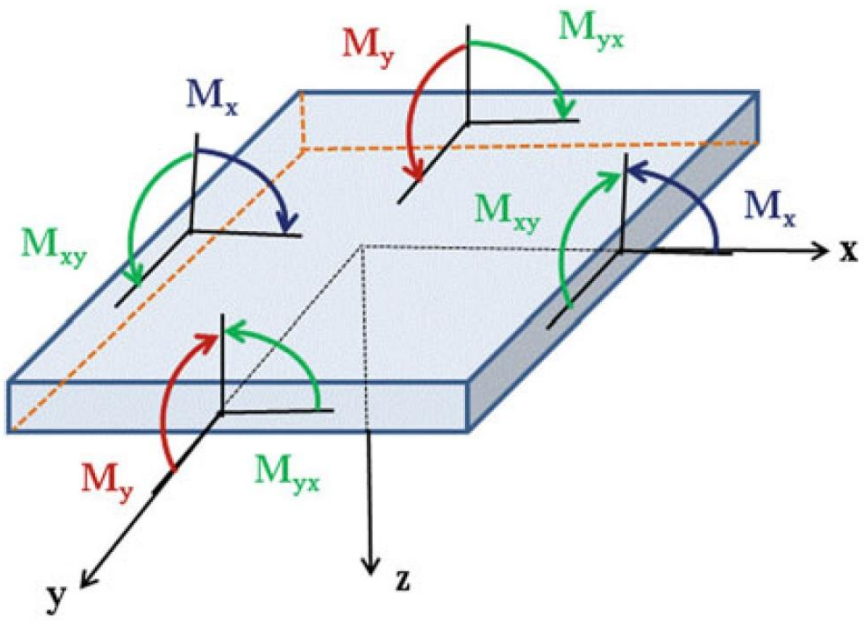
$$\{N\} = [A]\{\varepsilon^{\circ}\} + [B]\{\kappa\} \qquad (۱۶,۱۲)$$

ماتریسهای $[A]$ و $[B]$ ماتریسهای ضرایب هستند که توابعی از خواص جنس لایه و توالی قرارگیری لایه ها می باشند. ماتریس $[A]$ بیانگر سفتی درون صفحه ای و ماتریس $[B]$ ترکیب خمش–اتساع را تعریف می کند. $[A]$ تابعی از ضخامتهای لایه است اما مستقل از توالی قرارگیری لایه می باشد. در مقابل، $[B]$ مستقل از ضخامت لایه ها و توالی قرارگیری لایه ها می باشد. برای یک کامپوزیت لایه ای که توالی قرارگیری آن حول صفحه میانی لایه ها، متقارن است، $[B] \equiv 0$ است، و هیچ گونه ترکیب خمش–اتساع وجود ندارد. خواص ماده، سفتی ها $[\bar{Q}]$، در هر لایه ثابت است. از اینرو، انتگرال گیری را می توان با یک مجموع بر روی همه لایه ها جایگزین کرد. عبارتهای صریح برای $[A]$ و $[B]$ عبارتند از:

$$[A] = \sum_{k=1}^{N} [\bar{Q}]^k (z_k - z_{k-1})$$
$$[B] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} [\bar{Q}]^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \qquad (۱۶,۱۳)$$

گشتاورهای بر واحد طول، $\{M\}$ (شکل ۱۶,۴) به صورت انتگرالهای گشتاورهای دیفرانسیل، $\{\sigma\}zdz$ که بر روی ضخامت کامپوزیت، انتگرال گیری می شود

$$\{M\} = \int_{-H}^{H} \{\sigma\}zdz \qquad (۱۶,۱۴)$$



شکل ۱۶,۴ گشتاورهای خمشی

با جایگذاری رابطه (۱۶,۸) برای تنشها در رابطه (۱۶,۱۴) و انتگرال گیری، معادلات گشتاور به شکل زیر به دست می آید:

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^\circ\} + [D]\{\kappa\} \qquad (۱۶,۱۵)$$

در اینجا، ماتریس سفتی خمشی، [D]، یک ماتریس ضرایب شبیه [A] و [B] است. این ماتریس به توالی قرارگیری لایه ها وابسته است و برای کامپوزیت لایه ای متقارن، برابر با صفر نیست. عبارت صریح برای [D] برابر است با:

$$[D] = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N}[\bar{Q}]^k\left(z_k^3 - z_{k-1}^3\right) \tag{۱۶,۱۶}$$

ترکیب معادلات نیرو و گشتاور به شکل ماتریس منفرد، منجر به معادله اساسی تئوری کامپوزیت لایه ای می شود.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon^{\circ} \\ \kappa \end{Bmatrix} \tag{۱۶,۱۷}$$

این معادله ترکیب رفتارهای خمش و اتساع یک کامپوزیت لایه ای را از طریق ماتریس [B] نشان می دهد. اگر $[B] \equiv 0$ باشد، رفتار درون صفحه ای (نرمال و برشی) از رفتار خمشی تفکیک می شود. در عوض، ترکیب خمش و اتساع برای کامپوزیتهایی که حول صفحه میانی خود متقارن اند وجود ندارد، زیرا همانگونه که پیشتر نشان داده شد، برای کامپوزیتهای لایه ای متقارن، $[B] \equiv 0$ است. از اینرو، برای کامپوزیتهای لایه ای متقارن:

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon^o\} \tag{۱۶,۱۸}$$

$$\{M\} = [D]\{\kappa\} \tag{۱۶,۱۹}$$

۱۶,۴ خواص موثر کامپوزیت لایه ای

خواص مهندسی صفحه ای موثر برای کامپوزیتهای لایه ای متقارن را می توان از طریق آزمونهای تجربی و با شروع از رابطه کرنش صفحه میانی–نیرو (رابطه ۱۶,۱۸) برآورد کرد. برای خواص موثر کامپوزیت لایه ای، می خواهیم با تنش متوسط بر روی ضخامت کامپوزیت کار کنیم. از اینرو، ملاحظه می شود که تنش متوسط کامپوزیت لایه ای $\{\bar{\sigma}\}$ با این رابطه به دست می آید:

$$\{\bar{\sigma}\} \equiv \frac{\{N\}}{2H} \tag{۱۶,۲۰}$$

ترکیب روابط (۱۶,۱۸) و (۱۶,۲۰) عبارتی برای کرنشهای صفحه میانی برحسب تنش متوسط کامپوزیت لایه ای به دست می دهد:

$$\{\varepsilon^o\} = 2H[A]^{-1}\{\bar{\sigma}\} \tag{۱۶,۲۱}$$

در رابطه (۱۶,۲۱)، $[A]^{-1}$ وارون ماتریس $[A]$ است. برای سهولت، تعریف زیر ارایه می شود:

$$2H[A]^{-1} \equiv [a^*] \tag{۱۶,۲۲}$$

ماتریس $[a^*]$ انطباق کامپوزیت لایه ای نامیده می شود. اکنون می توانیم رابطه اساسی تنش – کرنش موثر برای کامپوزیت لایه ای متقارن را برحسب ماتریس انطباق بنویسیم:

$$\{\varepsilon^{\circ}\} = [a^*]\{\bar{\sigma}\} \tag{۱۶,۲۳}$$

رابطه (۱۶,۲۳) رابطه اساسی تنش–کرنش موثر برای کامپوزیت لایه ای متقارن است. می توان از این رابطه در آزمونهای تجربی خاص، وضعیتهای تنش مشخص، برای پیش بینی کرنش حاصل شده، و در نتیجه، برآورد خواص موثر کامپوزیتهای لایه ای یا همان ثوابت مهندسی بهره گرفت.

ماتریس انطباق $[a^*]$ عموما یک ماتریس متقارن به شکل زیر است:

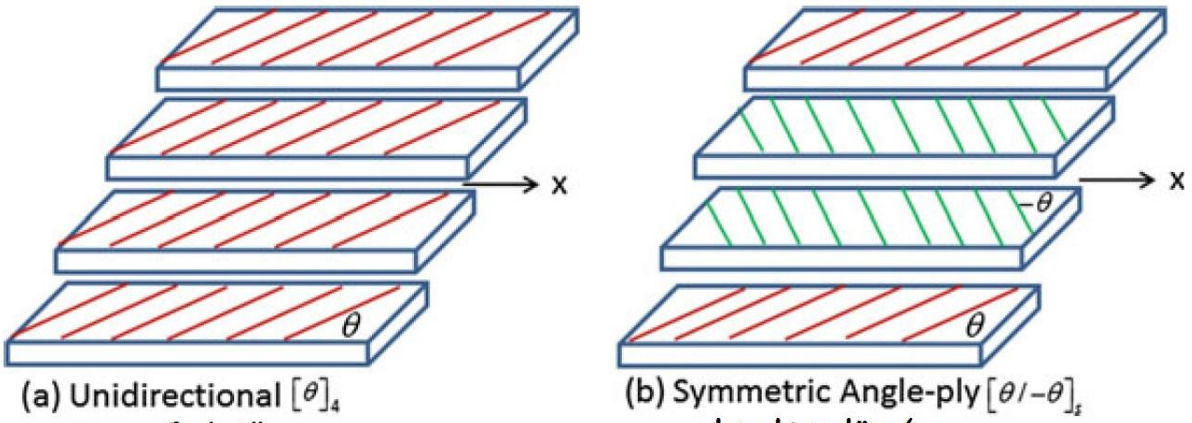
$$[a^*] = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{16}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & a_{26}^* \\ a_{16}^* & a_{26}^* & a_{66}^* \end{bmatrix} \tag{۱۶,۲۴}$$

اکنون رابطه تنش-کرنش اساسی (۱۶,۲۳) را می توان به شکل بسط داده شده بیان کرد:

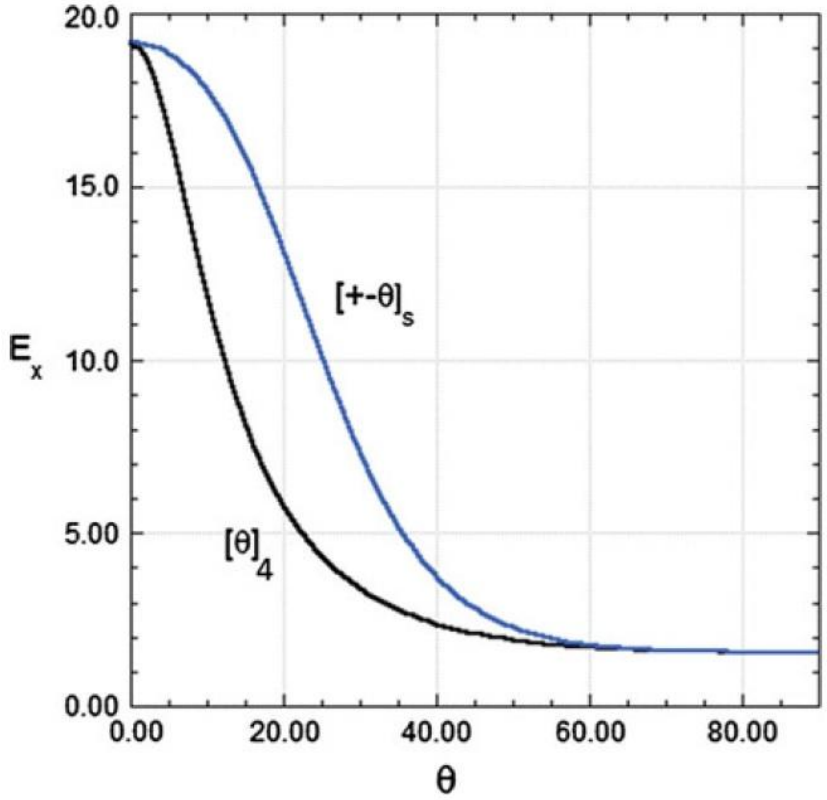
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{16}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & a_{26}^* \\ a_{16}^* & a_{26}^* & a_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} \tag{۱۶,۲۵}$$

در ادامه، مثالهایی که تغییرپذیری ثوابت مهندسی موثر را برحسب تابعی از راستای الیاف و توالی قرارگیری لایه ها برای کامپوزیتهای لایه ای تکه جهته، متقارن خارج از محور، و زاویه ای برای یک کامپوزیت کربن/اپوکسی نشان می دهد، ارایه شده است. یک کامپوزیت لایه ای تک جهته شامل لایه هایی است که همه آنها راستای الیاف و خواص مواد یکسانی دارند (شکل ۱۶,۵ الف). کامپوزیت متقارن زاویه ای دارای تعداد لایه های برابر در راستاهای الیاف $+\theta$ و $-\theta$ بوده که به صورت متقارن نسبت به صفحه میانی کامپوزیت لایه ای قرار گرفته اند (شکل ۱۶,۵ ب).

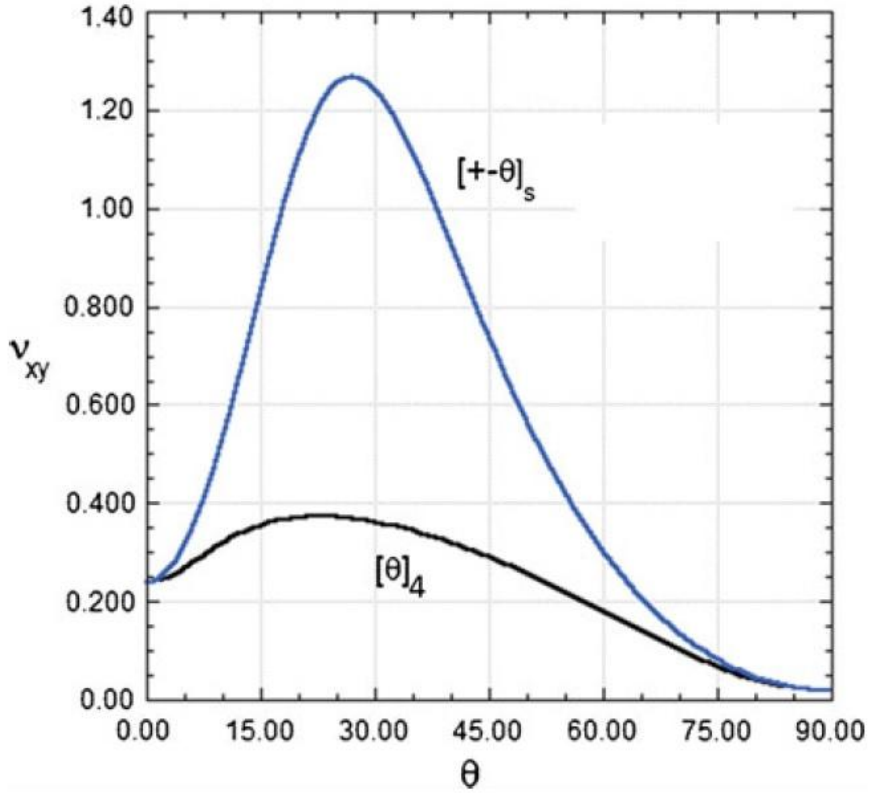
نتایج در شکلهای ۱۶,۶، ۱۶,۷، ۱۶,۸، و ۱۶,۹ یکی از مزایای اصلی مواد کامپوزیت الیافدار را نشان می دهد، که همان توانایی تنظیم خواص ماده با انتخاب راستای الیاف، ضخامتهای لایه، توالی روی هم قرار گرفتن، و خواص ماده هر یک از الیاف است.



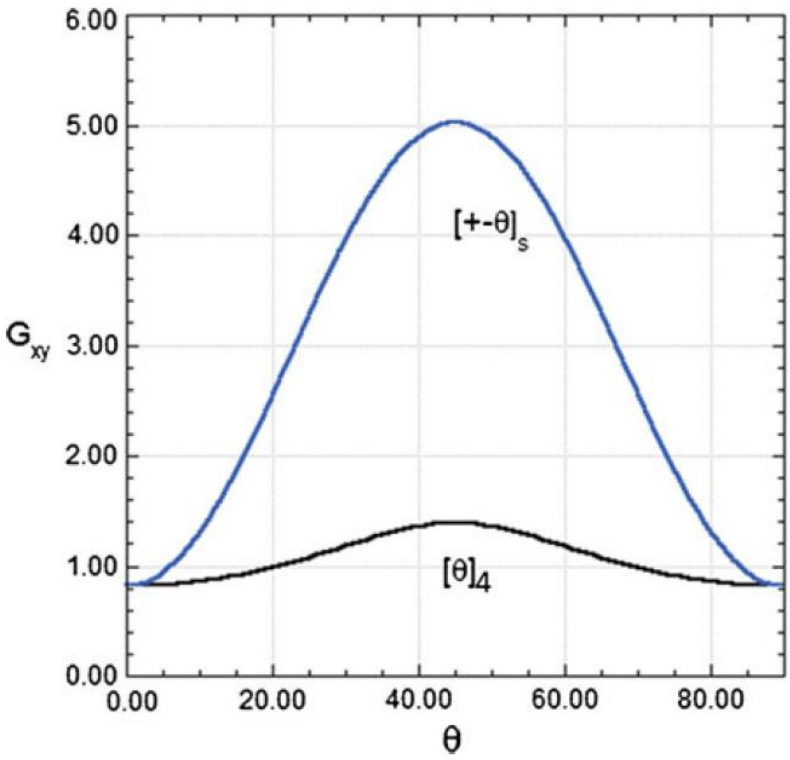
شکل ۱۶,۵ کامپوزیتهای لایه ای تک جهته و زاویه ای (الف) تک جهته $[\theta]_4$، (ب) متقارن زاویه ای $[\theta/-\theta]_4$



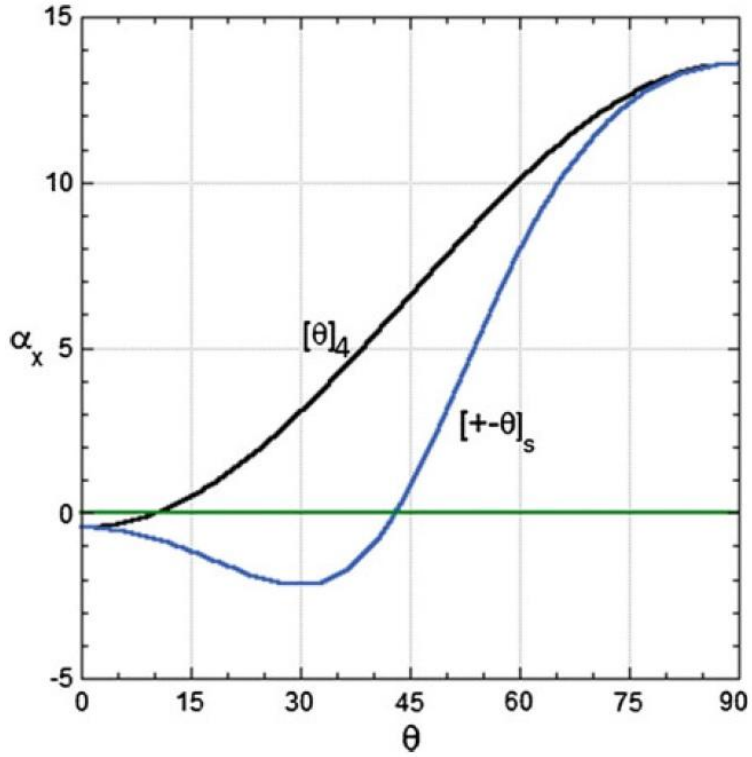
شکل ۱۶٫۶ مدول محوری موثر



شکل ۱۶٫۷ نسبت پواسون موثر



شکل ۱۶٫۸ مدول برشی موثر



شکل ۱۶٫۹ ضریب انبساط حرارتی موثر

نتایج ارایه شده در اینجا برای کامپوزیت کربن/اپوکسی T300/5208 است. این کامپوزیت شامل الیاف کربن T300 در زمینه اپوکسی (5208) است. پیش بینی های تئوری با نتایج تجربی صحه گذاری شده است.

۱۶,۵ مدول محوری موثر

برای آزمون کشش تک محوره، وضعیت تنش اعمالی برابر است با:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &> 0 \\ \bar{\sigma}_y &= 0 \\ \bar{\tau}_{xy} &= 0 \end{aligned} \tag{۱۶,۲۶}$$

با ترکیب روابط (۱۶,۲۵) و (۱۶,۲۶)، کرنشها به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^\circ &= a_{11}^* \bar{\sigma}_x \\ \varepsilon_y^\circ &= a_{12}^* \bar{\sigma}_x \\ \gamma_{xy}^\circ &= a_{16}^* \bar{\sigma}_x \end{aligned} \tag{۱۶,۲۷}$$

طبق تعریف، می توان مدول محوری موثر E_x را نیز به صورت زیر به دست آورد:

$$E_x = \frac{\bar{\sigma}_x}{\varepsilon_x^\circ} = \frac{1}{a_{11}^*} \tag{۱۶,۲۸}$$

پیش بینی مدول محوری موثر E_x کامپوزیتهای لایه ای زاویه ای و تک جهته در شکل ۱۶,۶ نشان داده شده است. کامپوزیت لایه ای زاویه ای، در محدوده زوایای صفر تا تقریبا ۶۰ درجه، سفتی بالاتری نسبت به کامپوزیت خارج از محور نشان می دهد. سفتی محوری بالاتر برای کامپوزیت لایه ای زاویه ای ناشی از اثر تقید (و وضعیت چند محوره تنش ناشی از آن) است که لایه های مجاور کامپوزیت نسبت به یکدیگر دارند.

۱۶,۶ نسبت پواسون درون صفحه ای موثر

نسبت پواسون موثر ν_{xy} به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y^\circ}{\varepsilon_x^\circ} = -\frac{a_{12}^*}{a_{11}^*} \tag{۱۶,۲۹}$$

مقایسه نسبتهای پواسون (شکل ۱۶,۷) یکی از جالب ترین و عجیب ترین نتایج برای کامپوزیتهای الیافدار لایه ای است. در کامپوزیتهای لایه ای زاویه ای، که لایه های خارج از محور با زوایه هایی قرینه نسبت به هم قرار گرفته اند، نسبت پواسون به صورت چشمگیری افزایش می یابد. این نتیجه برای گستره وسیعی از راستاهای الیاف وجود دارد. کامپوزیت لایه ای زاویه ای، در زاویه تقریبا ۲۷ درجه (برای کامپوزیت کربن/اپوکسی) نسبت پواسون بیش از ۱,۲۵ می تواند داشته باشد. این موضوع که نسبت پواسون می تواند عددی بیش از 1.0 باشد برای آنها که با فلزات عادت کرده موضوع بسیار شگفت انگیزی است، زیرا برای فلزات بیشینه مقدار نسبت پواسون برابر با 0.5 است.

۱۶,۷ مدول برشی موثر

مدول برشی معیاری از مقاومت (سفتی) مواد در برابر با بارگذاری برشی N_{xy} است (شکل ۱۶,۳). برای کامپوزیت لایه ای متقارن که در معرض تنش برشی خالص $\bar{\tau}_{xy}$ قرار گرفته، کرنش برشی از رابطه (۱۶,۲۵) به صورت زیر به دست می آید:

$$\gamma_{xy}^{\circ} = a_{66}^{*}\bar{\tau}_{xy} \qquad (۱۶,۳۰)$$

طبق تعریف، مدول برشی موثر G_{xy} برابر است با:

$$G_{xy} = \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\gamma_{xy}^{\circ}} = \frac{1}{a_{66}^{*}} \qquad (۱۶,۳۱)$$

کامپوزیت زاویه ای اساسا در تمامی زوایای الیاف، سفتی بیشتری نسبت به کامپوزیت تک جهته دارد (شکل ۱۶,۸). در $\theta = 45^{o}$، که در آن سفتی برشی برای لایه ها و کامپوزیت بیشترین مقدار را دارد، سفتی کامپوزیت کربن/اپوکسی مورد نظر بیش از 3.5 برابر سفتی لایه ها است. این نتیجه به وضوح نشان می دهد که زاویه الیاف $\pm 45^{o}$ برای سازه هایی که بیشترین مدول برشی را باید داشته باشند، مطلوب است.

۱۶,۸ ضریب انبساط حرارتی موثر

مبانی انبساط حرارتی برای مواد همسانگرد در فصل ۱۱ مورد بررسی قرار گرفته است. اگر ماده همسانگرد باشد، ضریب انبساط حرارتی منفرد α وجود دارد که بر رفتار حرارتی آن تاثیر می گذارد. اغلب مواد ضرایب انبساط حرارتی مثبتی دارند و هنگام گرم شدن منبسط، و هنگام سرد شدن منقبض می شوند. مواد کامپوزیت الیافدار همسانگرد نیستند، از اینرو، انبساط حرارتی آنها به راستا وابسته است.

کامپوزیت الیافدار تک جهته یک ماده ارتوتروپیک با سه ضریب انبساط حرارتی متمایز است که هر کدام در راستای سه جهت اصلی ماده می باشند. برای کامپوزیتها، این ضرایب به صورت ماتریس $\{\alpha\}$ بیان می شود، که در آن:

$$\{\alpha\} \equiv \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \qquad (۱۶,۳۲)$$

هنگامی که لایه های تک جهته با یکدیگر کامپوزیت لایه ای تشکیل می دهند، ضرایب موثر انبساط حرارتی تابعی از آرایش کامپوزیت (یعنی ضخامت لایه ها و جهت آنها) و راستای مورد نظر می باشد. برای کامپوزیتهای لایه ای، ما به ضرایب انبساط حرارتی درون صفحه ای موثر، علاقمندیم که به این صورت بیان می شود:

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (۱۶,۳۳)$$

توجه داشته باشید که کرنش برشی برای همه راستاها می تواند وجود داشته باشد.

ضریب انبساط حرارتی محوری (راستای الیاف) α_1 کامپوزیت تک جهته می تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. همانگونه که بعدا نشان داده خواهد شد، این موضوع تاثیر چشمگیری بر ضرایب انبساط حرارتی درون صفحه ای موثر کامپوزیتهای لایه ای می گذارد، که می تواند بسیار کوچک یا حتی منفی باشد. کامپوزیتهای لایه ای با ضرایب انبساط

حرارتی صفر یا اندک مشخصا حایز اهمیت اند، زیرا هنگامی که در معرض تغییرات دمایی قرار می گیرند منبسط یا منقبض نمی شوند. این موضوع یک ملاحظه طراحی بسیار مهم برای کاربردهایی است که در آن تغییرات دما برحسب زمان یا تغییرات دما در برخی از نواحی سازه وجود دارد.

باید توجه داشت که هنگامی که لایه های تک جهته با یکدیگر آمیخته شده تا یک کامپوزیت لایه ای تشکیل شود، انبساط حرارتی دیگر «انبساط حرارتی آزاد» نمی باشد. لایه های کامپوزیت (فرض می شود که) به یکدیگر کاملا چسبیده اند. لایه ها در راستاهای الیاف گوناگون، لایه های مجاور را مقید کرده و یک وضعیت داخلی تنش ایجاد می شود.

ضرایب موثر انبساط حرارتی $\{\overline{\alpha}\}$ برای کامپوزیتهای لایه ای را می توان با آغاز از رابطه ای برای کرنشهای حرارتی-مکانیکی کل $\{\varepsilon\}$ که به صورت برهم نهی کرنشهای ناشی از تنش $\{\varepsilon^{\sigma}\}$ و کرنشهای حرارتی «آزاد» $\{\varepsilon^{T}\}$ هستند، پیش بینی کرد:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{\circ}\} + z\{\kappa\} = \{\varepsilon^{\sigma}\} + \{\varepsilon^{T}\} \qquad (۱۶,۳۴)$$

معادله مشخصه لایه، تنش را برحسب عبارات «تنش وابسته به» کرنش به این صورت بیان می کند:

$$\{\sigma\} = [\bar{Q}]\{\varepsilon^{\sigma}\} \qquad (۱۶,۳۵)$$

ترکیب روابط (۱۶,۳۴) و (۱۶,۳۵) معادله اساسی تنشهای یک لایه از کامپوزیت لایه ای که در معرض بارگذاری حرارتی قرار گرفته است را به دست می دهد:

$$\{\sigma\} = [\bar{Q}]\left(\{\varepsilon^{\circ}\} + z\{\kappa\} - \{\varepsilon^{T}\}\right) \qquad (۱۶,۳۶)$$

برای کامپوزیت لایه ای متقارن، انحنا $\{\kappa\} = 0$ است و کرنش کل در هر لایه، کرنش صفحه میانی $\{\varepsilon^{o}\}$ است.

اکنون می توان ضریب انبساط حرارتی موثر کامپوزیت لایه ای $\{\overline{\alpha}\}$ را به این صورت تعریف کرد:

$$\{\bar{\alpha}\} = \frac{\{\varepsilon^{\circ}\}}{\Delta T} \qquad (۱۶,۳۷)$$

اکنون نشان داده شده که این مساله معادل است با تعیین کرنش صفحه میانی $\{\varepsilon^{o}\}$ برای کامپوزیت لایه ای متقارن که در معرض تغییرات دمایی قرار گرفته است و هیچ نیروی بیرونی به آن وارد نمی شود.

برای کامپوزیت لایه ای متقارن بدون اعمال گشتاورهای خارجی، انحنا و نیروی خارجی {N} برابر با صفر است. نیروی خارجی، انتگرال تنشها بر روی ضخامت کامپوزیت لایه ای است. از اینرو، با استفاده از رابطه (۱۶,۳۶) با $\{\kappa\} = 0$، داریم:

$$\{N\} = 0 = \int_{-H}^{H} [\bar{Q}]^{k}\left(\{\varepsilon^{\circ}\} - \{\alpha\}^{k}\Delta T\right)dz \qquad (۱۶,۳۸)$$

با ثابت بودن $\{\varepsilon^{o}\}$ و با استفاده از تعریف [A]، رابطه (۱۶,۳۸) به صورت زیر خلاصه می شود:

$$[A]\{\varepsilon^{\circ}\} = \Delta T \int_{-H}^{H} [\bar{Q}]^{k}\{\alpha\}^{k}dz \qquad (۱۶,۳۹)$$

با حل کردن معادله برای کرنش صفحه میانی و با استفاده از تعریف (۱۶,۳۷) برای ضریب انبساط حرارتی کامپوزیت لایه ای، داریم:

$$\{\bar{\alpha}\} = [A]^{-1} \int_{-H}^{H} [\bar{Q}]^k \{\alpha\}^k dz \qquad (۱۶,۴۰)$$

همچنین، از آنجا که همه کمیتها در هر لایه مقدار ثابتی دارند، می توان نوشت:

$$\{\bar{\alpha}\} = [A]^{-1} \sum_{k=1}^{N} [\bar{Q}]^k \{\alpha\}^k t^k \qquad (۱۶,۴۱)$$

در حالی که این رابطه در نگاه نخست ممکن است پیچیده به نظر برسد، با استفاده از کامپیوترهای نوین، حل مساله به سادگی امکان پذیر است.

پیش بینی ضریب انبساط حرارتی محوری برای کامپوزیتهای تک جهته و لایه ای T300/5208، به عنوان تابعی از راستای الیاف، در شکل ۱۶,۹ نشان داده شده است. همانگونه که در این شکل نشان داده شده، ضریب انبساط حرارتی برای کامپوزیت لایه ای تک جهته در $\theta = 0^o$ یک مقدار کوچک منفی است، که در زاویه تقریبا ۱۰ درجه از صفر عبور می کند و در زاویه ۹۰ درجه به بیشینه مقدار مثبت خود می رسد. نتیجه جالبتر مربوط به کامپوزیتهای لایه ای زاویه ای است. ضریب انبساط حرارتی کامپوزیت لایه ای از مقدار اندک منفی در $\theta = 0^o$ بیشتر کاهش می یابد. همچنان که زاویه راستای الیاف افزایش می یابد، ضریب انبساط حرارتی در زاویه تقریبا ۳۰ درجه به بیشترین مقدار منفی خود می رسد، در زاویه تقریبا ۴۲ درجه به صفر رسیده، و در زاویه ۹۰ درجه به بیشترین مقدار مثبت می رسد.

۱۶,۹ ضریب تاثیر متقابل موثر

به منظور تکمیل خواص مواد موثر برای کامپوزیتهای لایه ای، خاصیت ماده جدیدی به نام ضریب تاثیر متقابل $\eta_{xy,x}$ تعریف می کنیم که نسبت کرنش برشی مرتبط با کرنش محوری (در صورت وجود) است:

$$\eta_{xy,x} = \frac{\gamma_{xy}^{\circ}}{\varepsilon_x^{\circ}} = \frac{a_{16}^*}{a_{11}^*} \qquad (۱۶,۴۲)$$

۱۶,۱۰ تمرینها

۱۶,۱۰,۱ رابطه (۱۶,۱۰) را اثبات کنید.

۱۶,۱۰,۲ عبارت سفتی درون صفحه ای [A] در رابطه (۱۶,۱۳) را اثبات کنید.

۱۶,۱۰,۳ عبارت ترکیب خمش–اتساع [B] در رابطه (۱۶,۱۳) را اثبات کنید.

۱۶,۱۰,۴ عبارت سفتی خمشی [D] در رابطه (۱۶,۱۶) را اثبات کنید.

پیوست: پاسخها

۱۶,۱۰,۱ رابطه (۱۶,۱۰) را اثبات کنید.

پاسخ:

معادله مشخصه (۱۶,۸) برابر است با:

$$\{\sigma\}^k = [\bar{Q}]^k(\{\varepsilon^\circ\} + z\{\kappa\})$$

برای انحنای صفر با شکل بسط داده شده، این رابطه به صورت زیر در می آید:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \overset{\circ}{\varepsilon}_x \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_y \\ \overset{\circ}{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}$$

۱۶,۱۰,۲ عبارت سفتی درون صفحه ای [A] در رابطه (۱۶,۱۳) را اثبات کنید.

پاسخ:

$$\{\sigma\}^k = [\bar{Q}]^k(\{\varepsilon^\circ\} + z\{\kappa\})$$

$$\{N\} = \int_{-h}^{h} \{\sigma\}^k dz$$

از اینرو،

$$[A] \equiv \int_{-h}^{h} [\bar{Q}]\{\varepsilon^\circ\} dz$$

$$[A] \equiv \{\varepsilon^\circ\} \int_{-h}^{h} [\bar{Q}] dz = \{\varepsilon^\circ\} \sum_{k=1}^{N} [\bar{Q}]^k (z_k - z_{k-1})$$

انتگرال با عبارت مجموع جایگزین می شود زیرا $[\bar{Q}]^k$ در هر لایه ثابت است.

۱۶,۱۰,۳ عبارت ترکیب خمش–اتساع [B] در رابطه (۱۶,۱۳) را اثبات کنید.

پاسخ:

$$[B] \equiv \int_{-h}^{h} [\bar{Q}] z dz$$

$$[B] = \sum_{k=1}^{N} [\bar{Q}]^k \frac{\left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} [\bar{Q}]^k \left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right)$$

۱۶,۱۰,۴ عبارت سفتی خمشی [D] در رابطه (۱۶,۱۶) را اثبات کنید.

$$\{\sigma\}^k = [\bar{Q}]^k \left(\{\varepsilon^\circ\} + z\{\kappa\}\right)$$

$$\{M\} = \int_{-h}^{h} \{\sigma\}^k z dz$$

$$[D] = \int_{-h}^{h} [\bar{Q}] z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} [\bar{Q}]^k \left(z_k^3 - z_{k-1}^3\right)$$

مراجع

Herakovich, C. T. (1998). Mechanics of fibrous composites. New York: Wiley.
Herakovich, C. T. (2012). Mechanics of composites: A historical review. Amsterdam: Elsevier, Mechanics Research Communications.
Kirchhoff, G. (1850). J. Math (Crelle) bd. 40.

پیوست

الف.۱ روابط مثلثاتی

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

الف.۲ مشتق توابع مثلثاتی

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta$$
$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta$$
$$\frac{d}{d\theta}\sin^2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

الف. ۳ ممان اینرسی

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

$$J = \int_A r^2 dA$$

الف.۴ مشتقهای جزیی

تابع دومتغیره f با متغیرهای x و y، به این صورت نوشته می شود: f=f(x,y). آنگاه مشتق کل df برابر است با:

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$$

عبارتهای $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ مشتقات جزیی f=f(x,y) است. مشتق جزیی نسبت به یک متغیر یعنی تغییر ناشی از آن متغیر در حالی که سایر متغیرها ثابت می باشند.

الف.۵ عملگر بای هارمونیک ∇^4

عملگر بای هارمونیک دوبعدی در صفحه x-y به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nabla^4 \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$$

الف.۶ نمایش ماتریسی

نمایش ماتریسی روشی اختصاری برای بیان کمیتهای گسترده تر است. مثالهایی از آن در زیر ارایه شده است.

آرایه یک بعدی (که بردار نیز نامیده می شود) در فضای سه بعدی (i=1, 2, 3). A_1، A_2، و A_3 مولفه های بردار می باشند:

$$\{A\} \equiv A_i \equiv \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix}$$

آرایه دو بعدی (I, j =1, 2, 3):

$$[A] \equiv A_{ij} \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

ترانهاده A_{ij}^T ماتریس A_{ij} با جابجایی سطرها و ستونهای A_{ij} به دست می آید. از اینرو،

الف.۷ دترمینان ماتریس

دترمینان Δ یک ماتریس مرتبه دوم به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

دترمینان Δ یک ماتریس مرتبه سوم به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$= A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33}$$

الف.۸ وارون واتریس

وارون ماتریس $[A]^{-1}$ از ماتریس $[A]$ به این صورت تعریف می شود:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|\Delta|} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{|\Delta|} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

که در آن a_{ij} هم-ضرایب ماتریس [A] است که با حذف ردیف i ام و ستون j ام [A] و تشکیل دترمینان ماتریس باقیمانده (که ماتریس فرعی A_{ij} نامیده می شود) و ضرب آن در $(-1)^{i+j}$ به دست می آید.

نتیجه آن یک ماتریس مرتبه سوم به صورت زیر است:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|\Delta|} \begin{bmatrix} (A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) & -(A_{12}A_{33} - A_{13}A_{32}) & (A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}) \\ -(A_{21}A_{33} - A_{23}A_{31}) & (A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31}) & -(A_{11}A_{23} - A_{13}A_{21}) \\ (A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31}) & -(A_{11}A_{32} - A_{12}A_{31}) & (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) \end{bmatrix}$$

ماتریس دلتای کرونوکر $[\delta]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$[\delta] \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از اینرو،

الف.۹ تانسورها

تانسورها نمایش ریاضی کمیتهای فیزیکی اند. ویژگی بسیار مهم تانسورها آن است که از قوانین خاص انتقال بین دستگاه های مختصات پیروی می کنند. تانسورها به صورت نمایش اندیسی نوشته می شود؛ نمایش اندیسی را می توان مشابه نمایش ماتریسی تفسیر کرد. کمیت تانسوری f_i گفته می شود که یک اندیس آزاد i دارد. اگر اندیس تکرار شود، مانند f_{ii}، به آن اندیس غیراصلی گفته شده و رابطه مجموع از آن استنباط می شود. از اینرو، در فضای سه بعدی i=1, 2, 3:

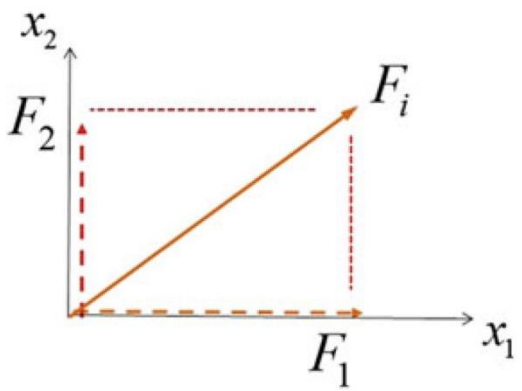
تانسورهای مرتبه مختلف به صورت زیر تعریف می شوند:

اسکالر – صفر اندیس آزاد – f یا f_{ii} (چگالی یک کمیت اسکالر است که مستقل از راستا می باشد).

بردار – یک اندیس آزاد – f_i (دارای سه مولفه است، مانند نیرو که در سه راستا مولفه دارد).

$$F_i = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

برای $F_3 = 0$ نمایش ترسیمی نیرو و مولفه های آن در صفحه $x_1 - x_2$ به صورت زیر است.

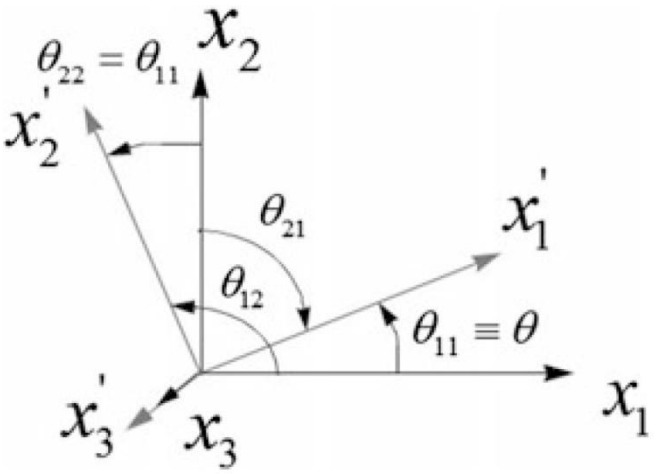


تانسور مرتبه دوم – دو اندیس آزاد σ_{ij} (مثالهای آن کرنش و تنش است).

الف.۱۰ تبدیلات تانسوری

غالبا تعیین صفحاتی که در آن مقادیر یک کمیت فیزیکی، بیشینه و/یا کمینه است، مطلوب می باشد. معادلات تبدیلات تانسوری برای تعیین کمیتها به عنوان تابعی از راستای دستگاه مختصات، ایده آل می باشند. تنش و کرنش مثالهای خوبی از کمیتهای تانسوری هستند که از روابط تبدیلات تانسوری ارایه شده در ذیل، پیروی می کنند.

تانسورها مولفه هایی دارند که از یک دستگاه مختصات به دستگاه مختصات دیگر (مانند دستگاه مختصات بدون پریم نسبت به دستگاه مختصات پریم دار نشان داده شده در شکل زیر) مطابق با معادلات تبدیلات تانسوری تغییر می کنند. ما تنها به مختصات کارتزین و بالتبع، تانسورهای کارتزین می پردازیم. تانسورها معمولا با نمایش اندیسی نوشته می شوند، که مرتبه تانسور با تعداد اندیسهای آزاد (غیرتکراری) مشخص می شود. اگر اندیسی تکرار شود، به معنی مجموع در محدوده اندیس می باشد، مگر آنکه خلاف آن ذکر شده باشد. برای مختصات کارتزین، اندیسها در فضای سه بعدی در محدوده ۱، ۲، و ۳ است و در فضای دو بعدی در محدوده ۱ و ۲ می باشد.



معادلات تبدیل کمیت تانسوری از یک دستگاه مختصات متعامد به دستگاه دیگر برحسب عبارتهای کسینوسهای هادی a_{ij} (i, j = 1, 2, 3) زوایای بین محورهای بدون پریم x_i با محورهای پریم دار x'_i، نوشته می شود (مانند $a_{12} = \cos\theta_{12}$ در شکل بالا). در این کتاب، ما از این قرارداد استفاده می کنیم که زیروند نخست (i) از a_{ij} مربوط به محورهای اولیه بدون پریم است و زیروند دوم (j) مربوط به محورهای ثانویه پریم دار می باشد. (خواننده توجه داشته باشد که برخی از نویسندگان قرارداد برعکس آن را درنظر می گیرند، یعنی زیروند نخست a_{ij} مربوط به محورهای ثانویه پریم دار می باشد).

با استفاده از مثلثات، کسینوسهای هادی برای دوران θ حول محور ۳ را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$a_{11} = \cos\theta_{11} = \cos\theta$	$a_{12} = \cos\theta_{12} = -\sin\theta$	$a_{13} = \cos 90 = 0$
$a_{21} = \cos\theta_{21} = \sin\theta$	$a_{22} = \cos\theta_{22} = \cos\theta$	$a_{23} = \cos 90 = 0$
$a_{31} = \cos 90 = 0$	$a_{32} = \cos 90 = 0$	$a_{33} = \cos 0 = 1$

به شکل ماتریسی، ضرایب تبدیل a_{ij} برابر است با:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در ادامه تلاش برای ساده کردن نگارش معادلات، مرسوم است که روابط $m = cos\theta$ و $n = sin\theta$ تعریف شود و به این ترتیب، ضرایب تبدیل برای دوران حول محور ۳ به این صورت نوشته می شود:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} m & -n & 0 \\ n & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الف.۱۱ تبدیلات برداری

معادلات تبدیل برای تانسور مرتبه اول در فضای سه بعدی عبارت است از:

$$F'_i = a_{ji}F_j$$

$$F'_i = a_{1i}F_1 + a_{2i}F_2 + a_{3i}F_3$$

و هر یک از مولفه ها برابر است با:

$$F'_1 = a_{11}F_1 + a_{21}F_2 + a_{31}F_3$$

$$F'_2 = a_{12}F_1 + a_{22}F_2 + a_{32}F_3$$

$$F'_3 = a_{13}F_1 + a_{23}F_2 + a_{33}F_3$$

الف.۱۲ تبدیلات تانسوری مرتبه دوم

معادلات تبدیل تانسور مرتبه دوم σ_{ij} برابر است با:

$$\sigma'_{ij} = a_{ki}a_{lj}\sigma_{kl}$$

در فضای دو بعدی (i, j = 1, 2) این رابطه به صورت زیر در می آید:

$$\sigma'_{ij} = a_{1i}a_{1j}\sigma_{11} + a_{1i}a_{2j}\sigma_{12} + a_{2i}a_{1j}\sigma_{21} + a_{2i}a_{2j}\sigma_{22}$$

و در فضای سه بعدی (i, j = 1, 2, 3) معادلات تبدیل برابر می شود با:

$$\sigma'_{ij} = a_{1i}a_{1j}\sigma_{11} + a_{1i}a_{2j}\sigma_{12} + a_{li}a_{3j}\sigma_{13} + a_{2i}a_{1j}\sigma_{21} + a_{2i}a_{2j}\sigma_{22}$$
$$+ a_{2i}a_{3j}\sigma_{23} + a_{3i}a_{1j}\sigma_{31} + a_{3i}a_{2j}\sigma_{32} + a_{3i}a_{3j}\sigma_{33}$$